

數學 1 進階講義

分式不等式

景美女中・莊嘉銘老師



信望愛文教基金會

2-4-4 分式不等式

定理敘述

分式不等式

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為兩多項式(含常數多項式), 且 $g(x)$ 不為零多項式, 則 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$) 稱為分式不等式。

定理證明或說明

分式不等式解題技巧：

1. 先移項、通分化簡成 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$) 的型式。
2. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$) $\Leftrightarrow f(x)g(x) > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$)，若不等式有等號，則需加上 $g(x) \neq 0$ 之條件。
3. 再利用解高次不等式的方式求解的範圍。

注意事項

不等式中，使分母為零的實根必須排除。

例題 1

解分式不等式：(1) $\frac{x+1}{x-3} < 0$ (2) $\frac{1}{x-1} \leq 1$

Ans：

$$(1) \frac{x+1}{x-3} < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

(2) 先移項得 $\frac{1}{x-1} - 1 \leq 0$ ，整理得 $\frac{2-x}{x-1} \leq 0 \Rightarrow (2-x)(x-1) \leq 0$ 但 $x \neq 1$
 $\Rightarrow (x-2)(x-1) \geq 0$ 但 $x \neq 1 \Rightarrow x < 1$ 或 $x \geq 2$

例題 2

解不等式 $\frac{x-2}{x^2-2x-3} \leq 0$ 。

Ans :

$$\frac{x-2}{x^2-2x-3} \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x^2-2x-3) \leq 0 \text{ 但 } x^2-2x-3 \neq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)(x+1) \leq 0 \text{ 但 } x \neq 3, x \neq -1$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ 或 } 2 \leq x < 3$$

例題 3

解不等式 $\frac{(x-1)^3(x+2)^2(-x^2+x-2)}{(x-3)} \geq 0$

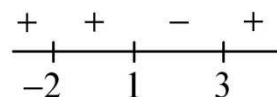
Ans :

$$\text{原式: } \frac{(x-1)(x+2)^2(x^2-x+2)}{x-3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+2)^2}{x-3} \leq 0 \quad (\because x^2-x+2 \text{ 恆正})$$

$$\Rightarrow (x+2)^2(x-1)(x-3) \leq 0 \text{ 但 } x \neq 3$$

畫數線(如右圖)可知解為 $x = -2$ 或 $1 \leq x < 3$



練習題

習題 1

【成功】

試求分式不等式 $\frac{x^3-1}{(x-3)(x+2)} \leq 0$ 之解為何？

習題 2

【南女】

試求不等式 $\frac{3}{x+2} < \frac{1}{x}$ 之解為何？

習題 3

試求不等式 $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} > \frac{3}{x+2} - \frac{3}{x+3}$ 之解為何？



習題 1 : $x < -2$ 或 $1 \leq x < 3$

習題 2 : $x < -2$ 或 $0 < x < 1$

習題 3 : $x < -4$ 或 $-3 < x < -2$ 或 $x > -1$