

選修數學

進階
講義

上

三角函數圖形

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

16-1-5 三角函數圖形



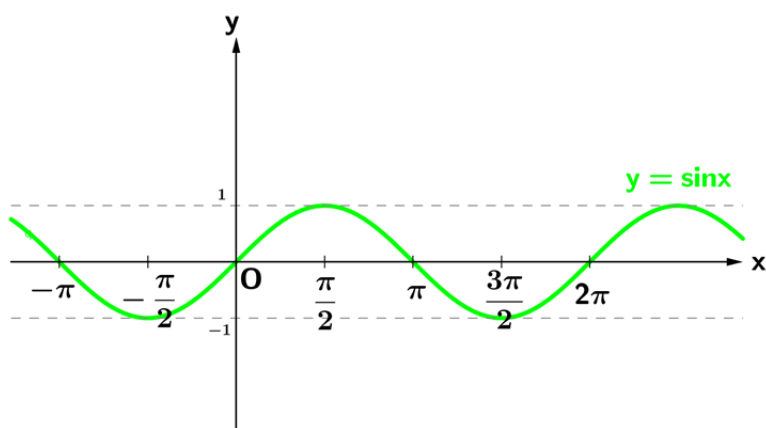
定理敘述

1. 週期函數

若對函數 $f(x)$ ，存在正數 p ，使得 $f(x+p) = f(x)$ 恆成立，則稱 $f(x)$ 為一週期函數，且滿足上述性質的最小正數 p ，稱之為 $f(x)$ 的週期

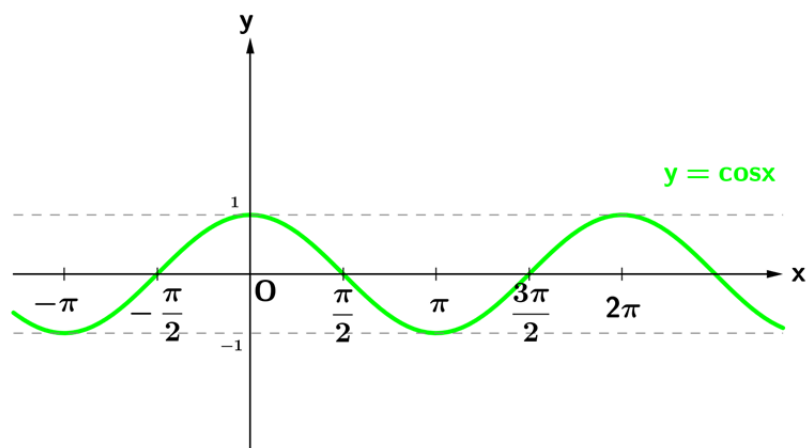
2. 三角函數的圖形

(1) 正弦函數： $y = \sin x$



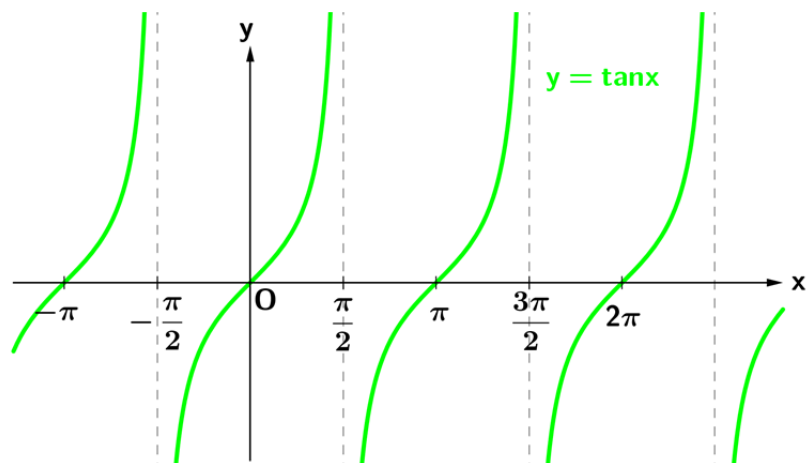
定義域： $\{x | x \in R\}$ 值域： $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ 週期： $p = 2\pi$

(2) 餘弦函數： $y = \cos x$



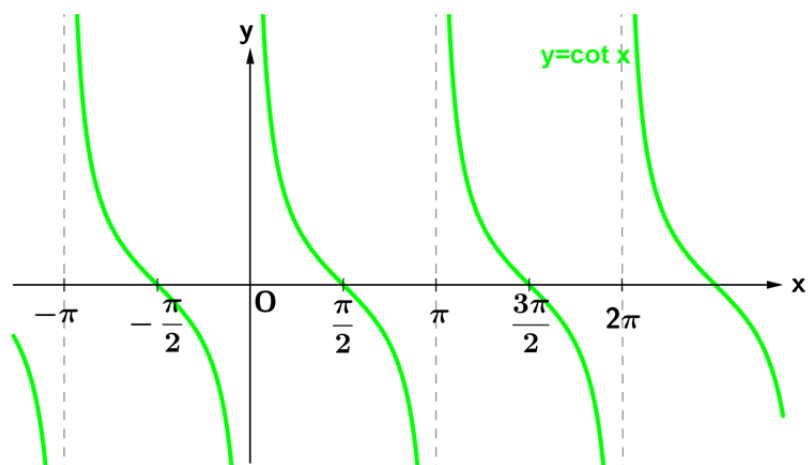
定義域： $\{x | x \in R\}$ 值域： $\{y | -1 \leq y \leq 1\}$ 週期： $p = 2\pi$

(3) 正切函數： $y = \tan x$



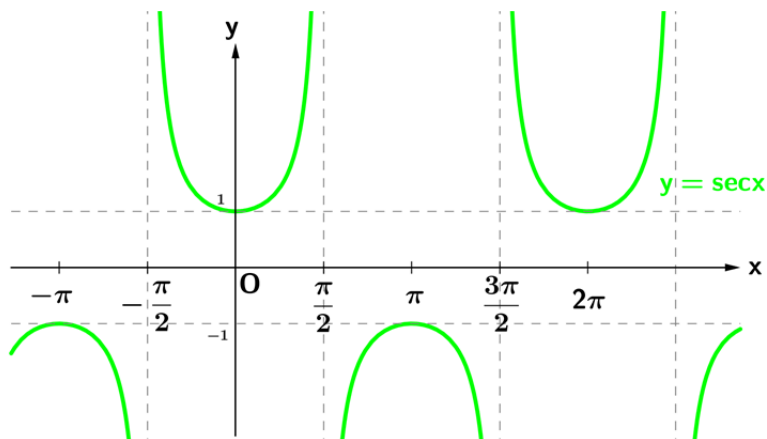
定義域： $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$ 值域： $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$ 週期： $p = \pi$

(4) 餘切函數： $y = \cot x$



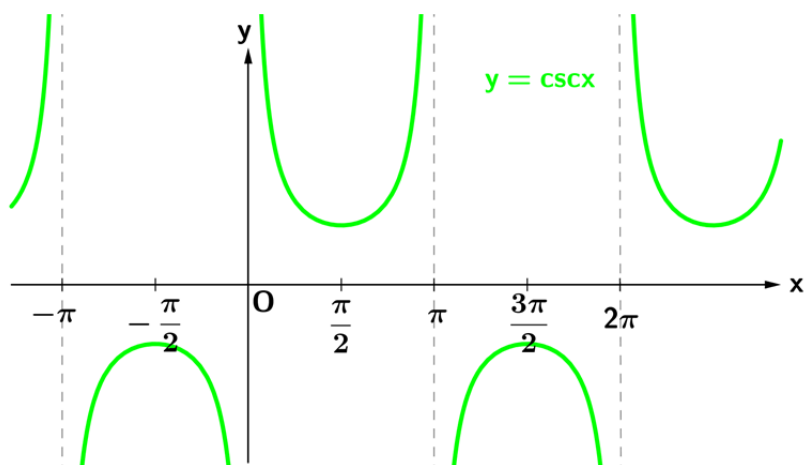
定義域： $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ 值域： $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$ 週期： $p = \pi$

(5) 正割函數： $y = \sec x$



定義域： $\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$ 值域： $\{y \mid |y| \geq 1\}$ 週期： $p = 2\pi$

(6) 餘割函數： $y = \csc x$



定義域： $\{x \mid x \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$ 值域： $\{y \mid |y| \geq 1\}$ 週期： $p = 2\pi$

3. 三角函數圖形的變化 (以 $\sin x$ 為例)

(1) $y = a \sin x$ ：圖形的振幅(距離平衡位置的最大位移)變為 $|a|$

(2) $y = \sin kx$ ：圖形的週期變為 $\frac{2\pi}{|k|}$ (若為 $\tan kx$ ，則圖形的週期為 $\frac{\pi}{|k|}$)

(3) $y = \sin(x-b)$ ：圖形向右平移 b 單位

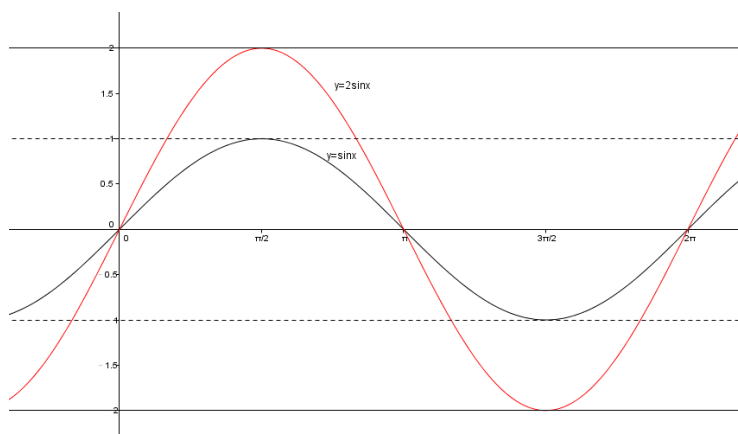
(4) $y = \sin x + c$ ：圖形向上平移 c 單位



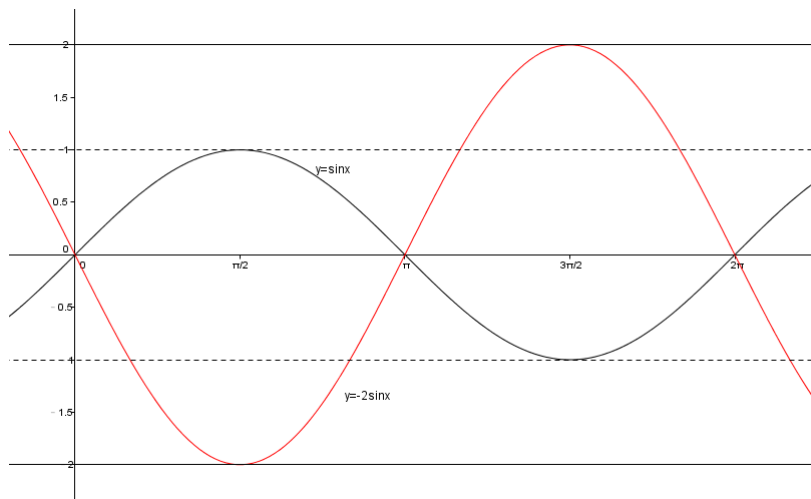
定理證明或說明

◆ 三角函數圖形的變化

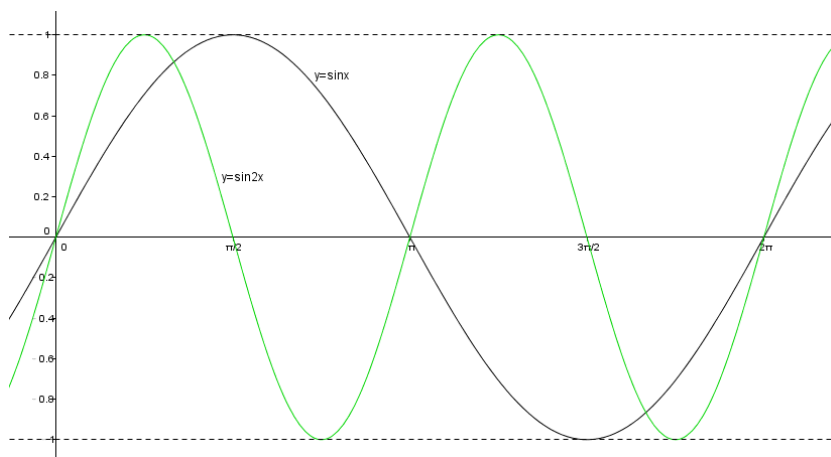
(1) $y = 2 \sin x$ ：圖形的振幅變為 2



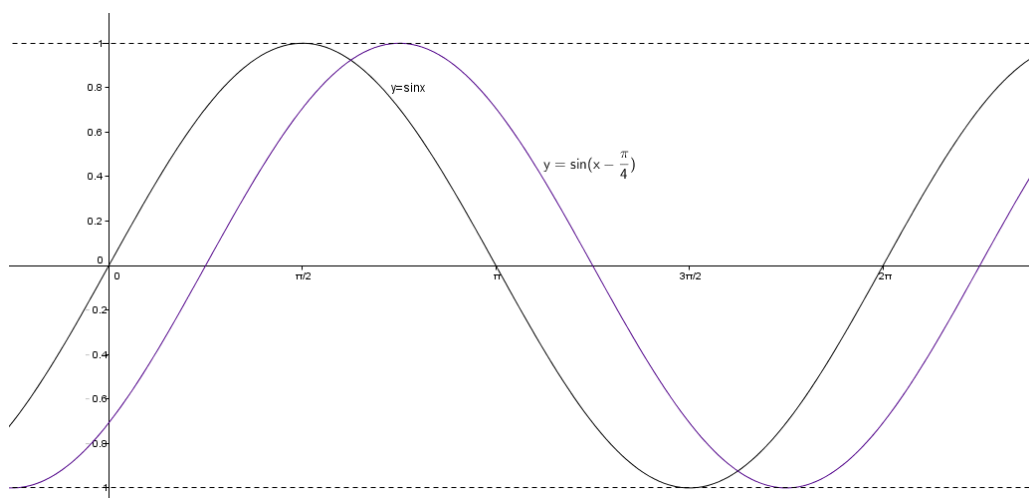
$y = -2\sin x$ ：圖形上下顛倒，但振幅依然為 2



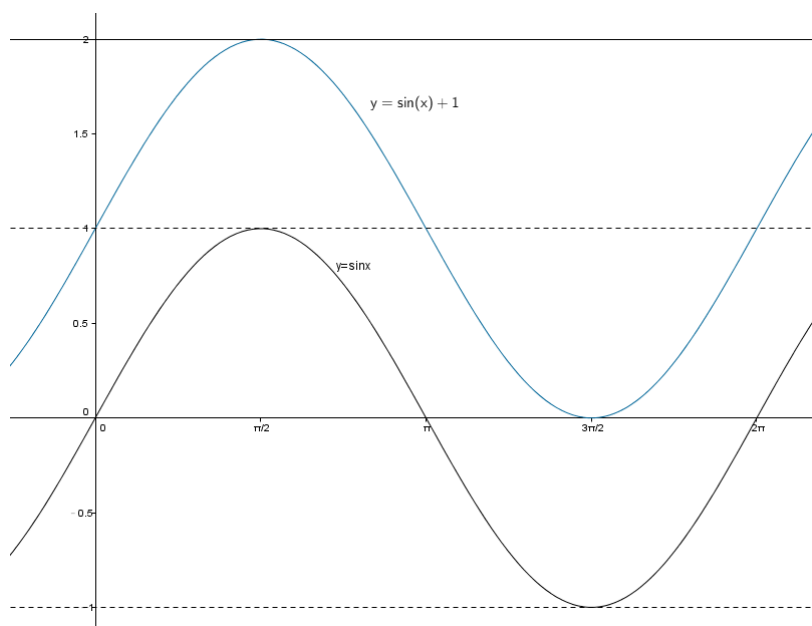
(2) $y = \sin 2x$ ：圖形的週期變為 $\frac{2\pi}{2} = \pi$



(3) $y = \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ：圖形向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位



(4) $y = \sin x + 1$: 圖形向上平移 1 單位



關鍵字

三角函數的圖形、週期

例題 1

下列各選項中，哪些函數的週期為 π ？

(A) $f_1(x) = 2\sin x$ (B) $f_2(x) = -2\cos x$ (C) $f_3(x) = \tan x$

(D) $f_4(x) = \cot x$ (E) $f_5(x) = \sin x + \cos x$

Ans : (C)(D)

解 : (A) $f_1(x + \pi) = 2\sin(x + \pi) = -2\sin x \neq f_1(x)$

(B) $f_2(x + \pi) = -2\cos(x + \pi) = 2\cos x \neq f_2(x)$

(C) $f_3(x) = \tan x$, 週期為 π

(D) $f_4(x) = \cot x$, 週期為 π

(E) $f_5(x + \pi) = \sin(x + \pi) + \cos(x + \pi) = -\sin x - \cos x \neq f_5(x)$

故選(C)(D)

例題 2

設 $\tan(\pi+1)=a$ ，則 $\sin(\frac{\pi}{2}+1)=$ _____ (以 a 表示)

Ans : $-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

解： $\tan(\pi+1)=\tan 1=a$ ，其中 1 為第一象限角

所求 $\sin(\frac{\pi}{2}+1)=-\cos 1=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

例題 3

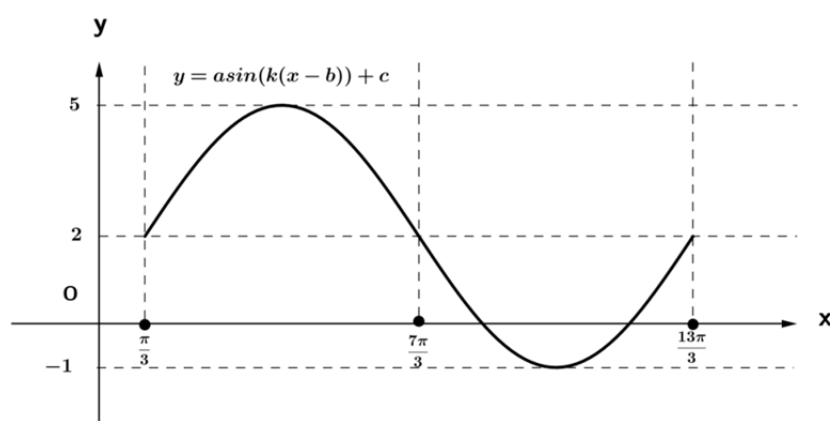
$y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$ 的圖形是由 $y=2\sin\frac{x}{2}$ 之圖形向右平移多少單位？

Ans : $\frac{\pi}{3}$

解： $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=2\sin[\frac{1}{2}(x-\frac{2\pi}{3})]$ ，所求為 $\frac{\pi}{3}$

例題 4

下圖為函數 $y=f(x)=a\sin(k(x-b))+c$ 的部分圖形，其中 a 、 b 、 c 、 k 皆為實數且 $a>0$ ， $0<b<2\pi$ ， $k>0$ ，試求 $a+b+c+k$ 之值。



Ans : $\frac{11}{2} + \frac{\pi}{3}$

解：圖形之週期為 $\frac{13\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 4\pi$ 、振幅為 $\frac{5 - (-1)}{2} = 3$ ，得 $a = 3$ ， $k = \frac{1}{2}$

此外，此圖為 $y = 3\sin \frac{x}{2}$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 單位、向上平移 2 單位。

故所求為 $a + b + c + k = 3 + \frac{\pi}{3} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2} + \frac{\pi}{3}$

例題 5

函數 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ 的對稱軸為 $x = a$ ， $0 < a < \pi$ ，求 a 之值為何？

Ans : $\frac{\pi}{2}$

解： $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ 的圖形為 $y = 3\sin 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 單位。

$y = 3\sin 2x$ 之週期為 π ，對稱軸為 $x = \frac{(2k+1)\pi}{4}$ ，其中 k 為整數。

得 $y = 3\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ 之對稱軸為 $x = \frac{(2k+1)\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{(k+1)\pi}{2}$ ，其中 k 為整數。

所求 $a = \frac{\pi}{2}$

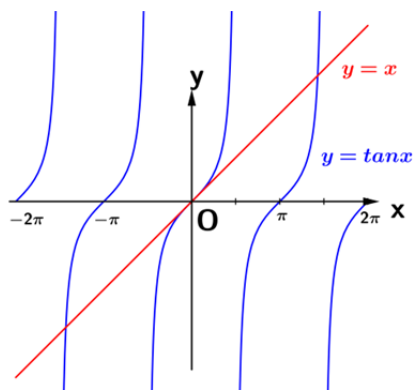
例題 6

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$ ，方程式 $\tan x = x$ 有幾個相異實根？

Ans : 4 個

解：所求即為 $y = \tan x$ 與 $y = x$ 在 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 時的交點個數。

畫其簡圖



因此，有 4 個相異實根。

例題 7

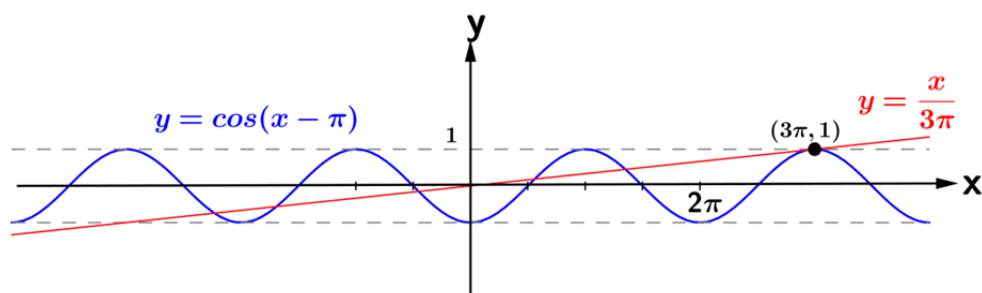
坐標平面上函數 $y = \cos(x - \pi)$ 的圖形和 $y = \frac{x}{3\pi}$ 的圖形之交點有幾個？

Ans：6 個

解： $y = \frac{x}{3\pi}$ 的圖形為通過點 $(0,0)$ 與 $(3\pi,1)$ 之直線

又 $y = \cos(x - \pi)$ 的圖形通過 $(0,-1)$ 與 $(3\pi,1)$ 、週期為 2π 且值域為 $[-1,1]$

畫其簡圖得：



因此，有 6 個交點。



溫故知新

習題 1

下列各選項中，哪些函數的週期為 π ？

(A) $f_1(x) = 2 \csc x$ (B) $f_2(x) = \sin x - \cos x$ (C) $f_3(x) = 2 \tan x$

(D) $f_4(x) = \sec x$ (E) $f_5(x) = |\sin x + \cos x|$

習題 2

化簡 $\frac{1}{1 + \tan(2 + \pi)} + \frac{1}{1 + \cot(2 - \pi)} =$ _____

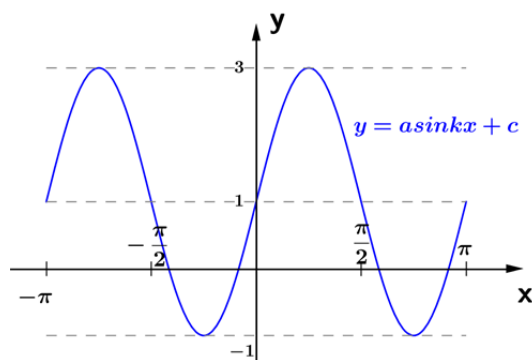
習題 3

下列哪一些函數圖形對稱於 y 軸？

- (A) $y = \sin x$ (B) $y = \cos x$ (C) $y = \sec x$ (D) $y = \csc x$ (E) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$

習題 4

下圖為 $y = a \sin kx + c$ 的圖形，其中 a 、 c 、 k 皆為實數且 $a > 0$ ， $k > 0$ ，試求 a 、 c 、 k 之值分別為何？



習題 5

關於坐標平面上 $y = 2 \sin 2(x - \frac{\pi}{3}) + 1$ 之圖形，下列敘述何者正確？

- (A) 振幅為 2 (B) 週期為 2π (C) 值域為 $[-1, 3]$ (D) 圖形對稱於 y 軸
(E) 與對數函數 $y = \log_2 x$ 之圖形有無限多個交點。

習題 6

方程式 $\sin x = x^3$ ，共有幾個實數解？

習題 7

試求 $y = 10 \sin x$ 與 $x - y = 0$ 兩圖形有幾個交點？

習題 8

方程式 $\sin 4x - \frac{x}{2\pi} = 0$ 有幾個實根？

習題 9

【學測 97】

在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？

- (1) $y = x + 100$ (2) $y = x^2 + 1$ (3) $y = 2 + \sin x$ (4) $y = 2^x$ (5) $y = \log x$

習題 10

【學測 96】

關於坐標平面上函數 $y = \sin x$ 的圖形和 $y = \frac{x}{10\pi}$ 的圖形之交點個數，下列哪一個選項是正確的？

- (1) 交點的個數是無窮多 (2) 交點的個數是奇數且大於 20 (3) 交點的個數是奇數且小於 20
 (4) 交點的個數是偶數且大於或等於 20 (5) 交點的個數是偶數且小於 20

習題 11

【學測 83】

下列那些方程式的部分圖形「不可能」出現在下圖中？

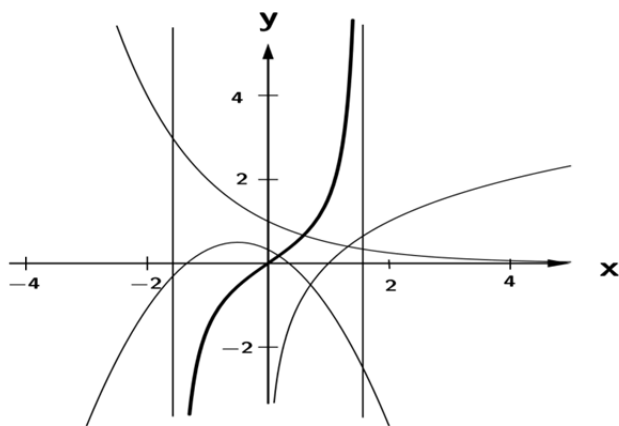
(A) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

(B) $y = \log_2 x$

(C) $y = \cot x$

(D) $5x^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

(E) $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 10 = 0$



習題 12

【學測 84】

下面有五組函數，那些組的兩個函數，其圖形互相對稱於 y 軸？

(A) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$ 和 $y = 2^{3x}$ (B) $y = 2^{3x}$ 和 $y = 3^{2x}$ (C) $y = x^2$ 和 $y = -x^2$

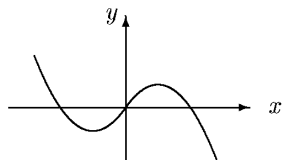
(D) $y = \log x$ 和 $y = \log(-x)$ (E) $y = \cos x$ 和 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

習題 13

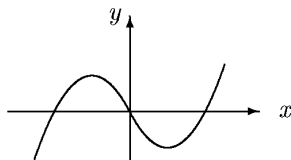
【學測 85】

已知下列五個圖形中有一個是 $y = -x(\cos x)$ 的部分圖形，判斷那一個選項是該圖形？

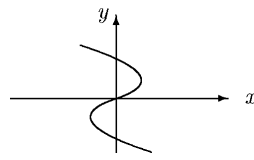
(A)



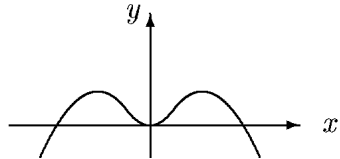
(B)



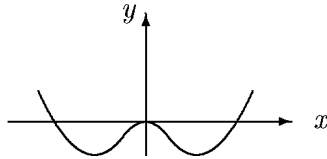
(C)



(D)



(E)



習題 14

【學測 87】

當 x 介於 0 與 2π 之間，直線 $y = 1 - x$ 與函數 $y = \tan x$ 的圖形，共有幾個交點？

- (1)0 (2)1 (3)2 (4)3 (5)4

習題 15

【指考甲 93】

設 $a > 0$ ，令 $A(a)$ 表示 x 軸、 y 軸、直線 $x = a$ 與函數 $y = 2 + \sin x$ 的圖形所圍成的面積。下列選項有哪些是正確的？

- (1) $A(a + 2\pi) = A(a)$ 恆成立。 (2) $A(2\pi) = 2A(\pi)$ 。
 (3) $A(4\pi) = 2A(2\pi)$ 。 (4) $A(3\pi) - A(2\pi) > A(2\pi) - A(\pi)$ 。

習題 16

【學測 92】

下列哪些函數的最小正週期為 π ？

- (1) $\sin x + \cos x$ (2) $\sin x - \cos x$ (3) $|\sin x + \cos x|$
 (4) $|\sin x - \cos x|$ (5) $|\sin x| + |\cos x|$



解答與解析

習題 1：(C) (E)

習題 2：2

習題 3：(B)(C)(E)

習題 4： $a = 2$ 、 $c = 1$ 、 $k = 2$

習題 5：(A)(C)

習題 6：3 個

習題 7：7 個

習題 8：15 個

習題 9：(2)(3)(4)

解： $x + 100$ 、 $\log x$ 可能為負值，

對於所有實數 x ， $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ 、 $2 + \sin x \geq 2 + (-1) = 1 > 0$ 、 $2^x > 0$

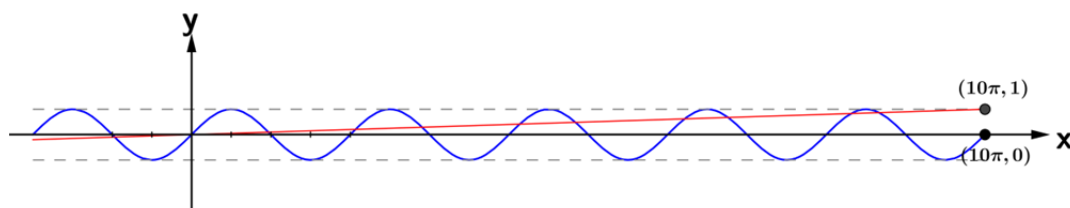
故選(2)(3)(4)

習題 10 : (3)

解： $y = \frac{x}{10\pi}$ 的圖形為通過點 $(0,0)$ 與 $(10\pi,1)$ 之直線

又 $y = \sin x$ 的圖形通過 $(0,0)$ 與 $(10\pi,0)$ 、週期為 2π 且值域為 $[-1,1]$

畫其簡圖得：



兩圖形的交點個數為 $\frac{10\pi}{2\pi} \times 2 \times 2 - 1 = 19$ ，故選(3)

習題 11 : (C)(D)(E)

解：圖中遞減的指數圖形可能為 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

圖中遞增的對數圖形可能為 $y = \log_2 x$

圖中三角函數的圖形可能為 $y = \tan x$

圖中拋物線的圖形是開口向下，所以不可能為(D)

最後(E)可化簡為 $(x+2)^2 - (y+3)^2 = 5$ 並沒有出現在圖中，

故選(C)(D)(E)

習題 12 : (A)(D)(E)

解：若 $f(-x) = g(x)$ ，則其圖形互相對稱於 y 軸

$$(A) \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{3(-x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3x} = (2^{-1})^{-3x} = 2^{3x}, \text{ 符合。}$$

$$(B) \quad 2^{3(-x)} = 2^{-3x} \neq 3^{2x}$$

$$(C) \quad (-x)^2 = x^2 \neq -x^2$$

$$(D) \quad y = \log x \text{ 和 } y = \log(-x), \text{ 符合。}$$

$$(E) \quad \cos(-x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \text{ 符合。}$$

故選(A)(D)(E)

習題 13 : (B)

解： $f(x) = -x(\cos x)$ ，則 $f(-x) = -(-x)(\cos(-x)) = x \cos x = -f(x)$ ，

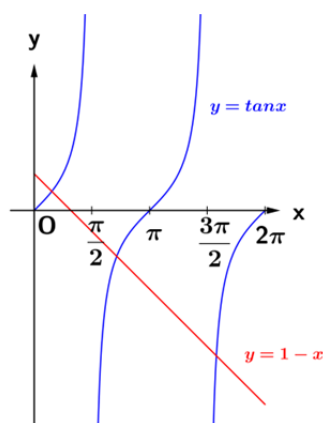
得函數 f 為奇函數，其圖形對稱於原點。因此不可能為 (C)(D)(E)

當 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x$ 皆為正 $\Rightarrow f(x) = -x(\cos x)$ 之函數值皆為負。

故選 (B)

習題 14 : (4)

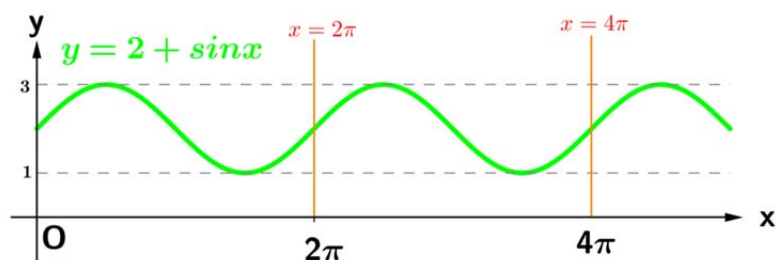
解：化其簡圖



有 3 個交點，故選 (4)

習題 15 : (3)(4)

解：如圖， $y = 2 + \sin x$ 之週期為 2π



得 $A(a+2\pi) > A(a)$ 、 $A(2\pi) < 2A(\pi)$ 、 $A(4\pi) = 2A(2\pi)$

以及 $A(3\pi) - A(2\pi) > A(2\pi) - A(\pi)$

故選 (3)(4)

習題 16 : 34

解：(1) 週期為 2π

(2) 週期為 2π

(3) 週期為 π

(4)週期為 π

(5)週期為 $\frac{\pi}{2}$