數學 3 進階講義

向量的線性組合

成功高中‧陳冠宏　老師

信望愛文教基金會

10-1-2　向量的線性組合

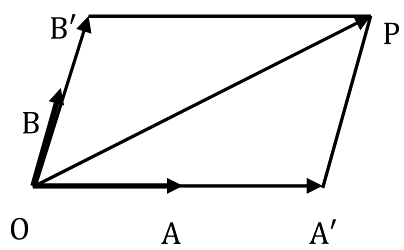
定理敘述

➢ 向量的線性組合

若$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上的每一個向量$\overrightarrow{OP}$都可以唯一表示成$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$的形式。我們將這種形式的向量表示法稱為$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的線性組合。

定理證明或說明

➢ 向量的線性組合



(1)如圖，過P點做$\overleftrightarrow{OB}$的平行線，交$\overleftrightarrow{OA}$於A'點，過P點做$\overleftrightarrow{OA}$的平行線，交$\overleftrightarrow{OB}$於 B'點。令$\overrightarrow{OA'}=x\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}=y\overrightarrow{OB}$，則$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$。

(2)設$\overrightarrow{OP}=x_1\overrightarrow{OA}+y_1\overrightarrow{OB}=x_2\overrightarrow{OA}+y_2\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow (x_1-x_2)\overrightarrow{OA}=(y_2-y_1)\overrightarrow{OB}$

若$x_1-x_2\neq 0$，則$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}\right)\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}//\overrightarrow{OB}$

但已知$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$為平面上兩個不平行的非零向量，矛盾，

故$x_1=x_2$，同理，$y_1=y_2$

因此，$\overrightarrow{OP}$寫成$\overrightarrow{OA}$與$\overrightarrow{OB}$的線性組合的表示法唯一

關鍵字

向量的線性組合

例題 1

已知一向量$\vec{a}=(3,4)$，則$\vec{a}$可以表示成下列哪些選項的線性組合

(1)(2,3),(1,4)　(2)(1,-2),(-2,4)　(3)(2,3),(4,5)

(4)(2,2),(3,3)　(5)(1,2),(2,-3)

Ans：(1)(3)(5)

解：$\vec{a}$可以表示成任意兩個不平行向量的線性組合，故選(1)(3)(5)

例題 2

已知$\vec{a}, \vec{b}$是兩個不平行的非零向量，且實數 s,t 滿足$(x+y-2)\vec{a}+(2x-y-1)\vec{b}=\vec{0}$，求 x,y 的值

Ans：x=1, y=1

解：$\because \vec{a},\vec{b}$不平行 $\therefore \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1, y=1$

例題 3

已知$\vec{a}, \vec{b}$是兩個不平行的非零向量，且實數 s, t 滿足 $s(3\vec{a}-\vec{b})+t(\vec{a}+2\vec{b})=5\vec{a}+4\vec{b}$，求 s, t 的值

Ans：$s=\frac{6}{7}, t=\frac{17}{7}$

解：

$$s(3\vec{a}-\vec{b})+t(\vec{a}+2\vec{b})=5\vec{a}+4\vec{b}$$

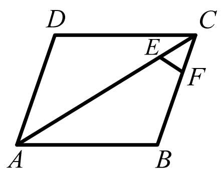
$$\Rightarrow (3s+t)\vec{a}+(-s+2t)\vec{b}=5\vec{a}+4\vec{b}$$

$\because$線性組合的表示法唯一

$$\therefore \begin{cases} 3s+t=5 \\ -s+2t=4 \end{cases} \Rightarrow s=\frac{6}{7}, t=\frac{17}{7}$$

例題 4

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AE}=4\overline{EC}$，$\overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{BC}$，若$\overrightarrow{EF}=r\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}$，則 $(r,s)=$______________



Ans：$(\frac{1}{5}, -\frac{2}{15})$

解：$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AD})$

$$=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$$

所以$(r,s)=(\frac{1}{5}, -\frac{2}{15})$

例題 5

$\vec{a}=(3,-4),\ \vec{b}=(2,3),\ \vec{c}=(8,-22)$，若 $x,y\in\mathbb{R}$ 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，則 $(x,y)=$____________

Ans：(4,-2)

解：

$\because \vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$

$\therefore$(8,-22)=x(3,-4)+y(2,3)

$$\begin{cases}3x+2y=8\\-4x+3y=-22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$$

例題 6

已知 A, B, C 三點不共線，若 $s\overrightarrow{AB}+(t+3)\overrightarrow{CB}+(s+4)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，試求 s, t 的值___

Ans：s=-2, t=-1

解：

$s\overrightarrow{AB}+(t+3)\overrightarrow{CB}+(s+4)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Rightarrow s\overrightarrow{AB}+(t+3)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)+(s+4)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Rightarrow (s+t+3)\overrightarrow{AB}+(s-t+1)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$$\begin{cases}s+t+3=0\\s-t+1=0\end{cases}\Rightarrow s=-2,t=-1$$

溫故知新

習題 1

已知一向量 $\vec{a}=(3,4)$，則 $\vec{a}$ 可以表示成下列哪些選項的線性組合？

(1)(2,8),(1,4)　(2)(2,-2),(-2,4)　(3)(1,3),(2,5)　(4)(2,2),(3,4)　(5)(1,2),(2,4)

習題 2

$\vec{a}=(3,-2),\ \vec{b}=(1,3),\ \vec{c}=(7,-12)$，若 $x,y\in\mathbb{R}$ 使得 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，則 $(x,y)=$____________

習題 3

設$\vec{a}=(3,5),\ \vec{b}=(-2,3)$，$\alpha,\beta$ 為實數，若$(\alpha+\beta-1)\vec{a}+(\alpha-\beta-5)\vec{b}=\vec{0}$，

則$(\alpha,\beta)=$ ____________

習題 4

已知$\vec{a},\ \vec{b}$是兩個不平行的非零向量，且實數 s, t 滿足 $s(-\vec{a}+3\vec{b})+t(2\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}+5\vec{b}$，

求 s, t 的值

習題 5

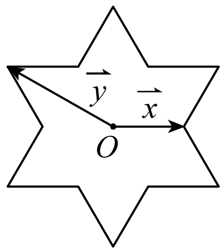
平行四邊形 ABCD 中，E 在$\overline{AB}$邊上，且$\overline{AE}:\overline{EB}=1:3$，F 在$\overline{AD}$邊上，且$\overline{AF}:\overline{FD}=2:3$，分別過 E, F 做平行$\overline{AD}$與$\overline{AB}$的兩直線，交於 P 點，若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，試求(x, y)=____

習題 6

已知 A, B, C 三點不共線，若$s\overrightarrow{AB}+(t+3)\overrightarrow{BC}+(2s-4)\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，試求 s, t 的值___

習題 7 【指考甲 101】

將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中$\vec{x},\ \vec{y}$分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若將原點 O 到正六角星 12 個頂點的向量，都寫成為$a\vec{x}+b\vec{y}$的形式，則 $a+b$ 的最大值為何？



(1)2 (2)3 (3)4 (4)5 (5)6

解答與解析

習題 1：(2)(3)(4)

習題 2：(3,-2)

習題 3：(3,-2)

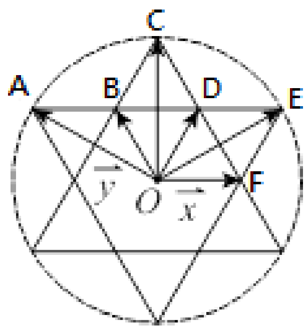
習題 4： $s=\frac{6}{7},t=\frac{17}{7}$

習題 5：(x, y)=$(\frac{1}{4},\frac{2}{5})$

習題 6：s=4, t=1

習題 7：(4)

解：如圖



$\overrightarrow{OA}=\vec{y}\Rightarrow(a,b)=(0,1)$

$\overrightarrow{OB}=\vec{x}+\vec{y}\Rightarrow(a,b)=(1,1)$

$\overrightarrow{OC}=3\vec{x}+2\vec{y}\Rightarrow(a,b)=(3,2)$

$\overrightarrow{OD}=2\vec{x}+\vec{y}\Rightarrow(a,b)=(2,1)$

$\overrightarrow{OE}=3\vec{x}+\vec{y}\Rightarrow(a,b)=(3,1)$

$\overrightarrow{OF}=\vec{x}\Rightarrow(a,b)=(1,0)$

$\therefore a+b$的最大值為$3+2=5$，故選(4)