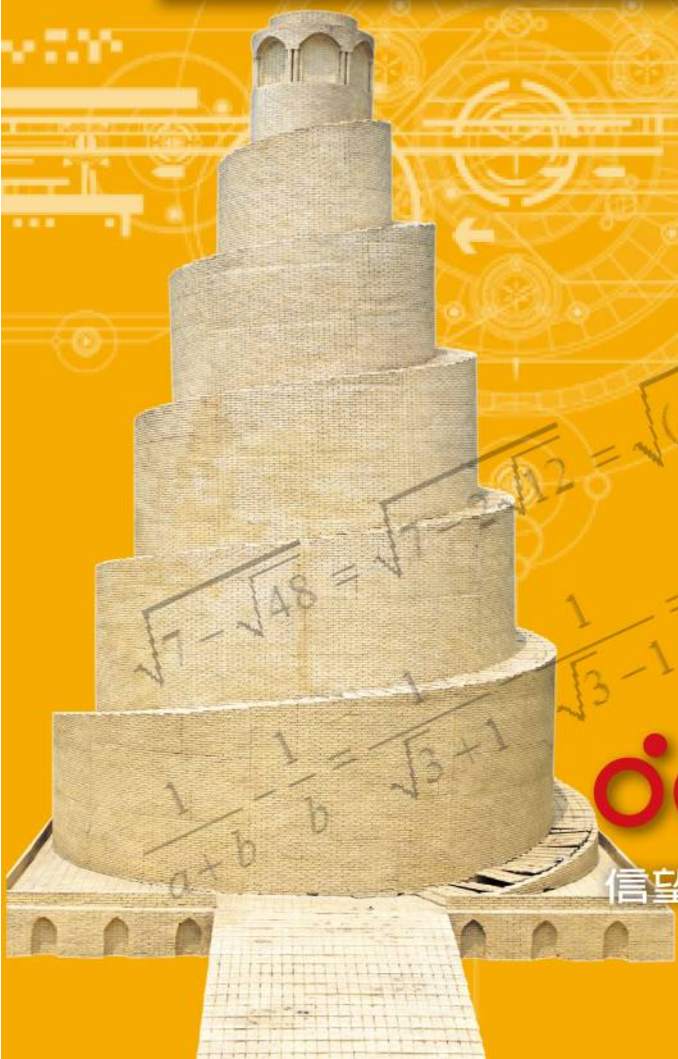
數學 基礎講義

線性規劃

信望愛文教基金會．數學種子教師團隊

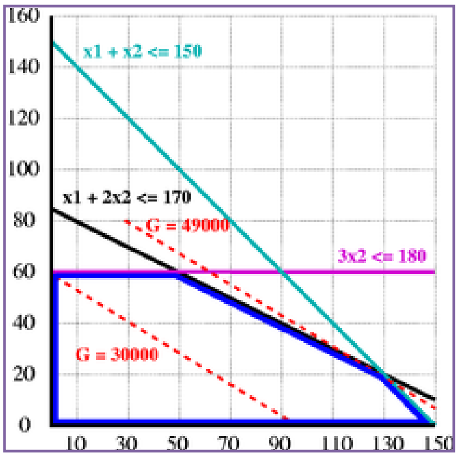


信望愛文教基金會

線性規劃

　　在日常生活中，很多我們面對到的事情其結果都不會只受到一個原因影響。

　　例如你今天早上的數學小考成績就會受到唸書的時間、玩樂的時間、昨天的睡眠品質、早餐有沒有好好吃這麼多的因素影響，而各種因素之間往往又存在著互相牽制的關係，玩樂的時間多；唸書的時間就少，唸書的時間多；睡眠時間又少，睡到自然醒；早餐可能就要邊考試邊吃。俗話說魚與熊掌不可兼得，如何在諸多互相牽制的限制條件下找出最好的答案這就是線性規劃的概念。



二元一次不等式

　　考慮一個形式為$ax+by+c=0$，且$a,b\neq0$的二元一次方程式，

其中的等號[＝]改為不等號[>]、[<]、[≧]、[≦]時，就是二元一次不等式。

如何圖解二元一次不等式(1)

二元一次方程式線上任一點 (x_0,y_0) 代入原函數皆會使得 $ax_0+by_0+c=0$。

若$a>0$，則圖形右邊任一點 (x,y) 代入皆會使得$ax+by+c>0$。

圖形左邊任一點 (x,y) 帶入皆會使得$ax+by+c<0$。

Proof

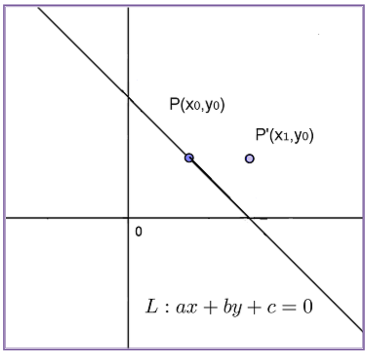
在線上任取一點(x_0,y_0)對該點做水平線，

選擇圖形右側任一點 (x_1,y_0)，此點必滿足 $x_1 > x_0$

$a > 0 \quad \Rightarrow \quad ax_1 > ax_0$

$\Rightarrow \quad ax_1+by_0+c>ax_0+by_0+c = 0$

所以圖形右側任一點皆滿足 $ax_1+by_0+c>0$



如何圖解二元一次不等式(2)

二元一次方程式線上任一點（x_0,y_0）代入原函數皆會使得 $ax_0+by_0+c=0$。

若$b>0$，則圖形上方任一點(x,y)代入皆會使得$ax+by+c>0$

圖形下方任一點(x,y)帶入皆會使得$ax+by+c<0$

Proof

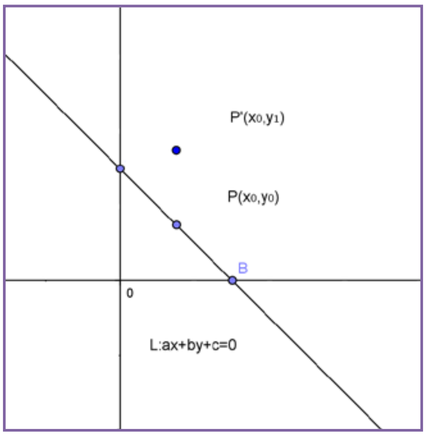
在線上任取一點（x_0,y_0）對該點做鉛直線，

選擇圖形上方任一點（x_0,y_1），此點必滿足$y_1>y_0$

$b>0 \Longrightarrow by_1>by_0$

$\Longrightarrow ax_0+by_1+c>ax_0+by_0+c=0$

所以圖形上方任一點(x_0,y_1)皆滿足$ax_0+by_1+c>0$



二元一次不等式組

一個以上的二元一次不等式聯立可得一組二元一次不等式組。

在座標平面上，二元一次不等式組的圖形就是各不等式所代表之半平面的交集，也就是重疊的區域。

定義線性規劃

簡單來說，線性規劃處理的是一種稱為線性最佳化（Optimization）的問題。當我們面對到的決策，其中涉及了 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 共 n 個變數，若是有一個目標函數 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 可以表示為 $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ 這樣的線性函數，同時這些變數之間互相牽制的關係可以以 m 個線性不等式來表示。找出在滿足所有限制關係下，目標函數的最大或最小值就是線性規劃。

注意：

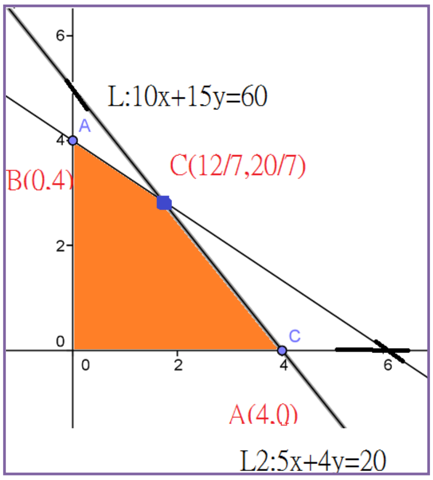
線性規劃的確有能力可以解多個變數的最優化問題，但因當變數超過三個之後的計算難度會大幅提升，故在高中教材我們僅討論兩個變數之線性規劃問題。

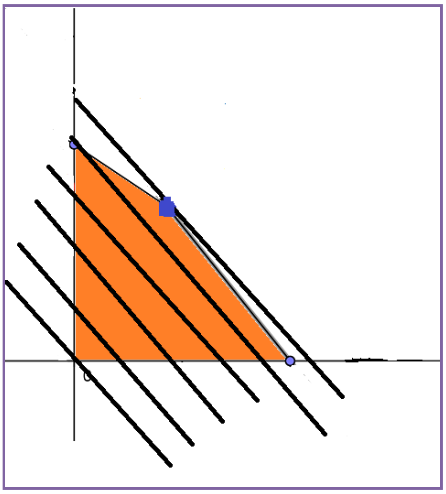
關於解線性規劃問題在高中我們主要依賴以下兩種作法：

平行線法

例題	假設今天有某間工廠，可以用兩種不同的原料生產出同一種商品，若採用甲原料，每噸成本 1000 元，運費 500 元，可生產出產品 90 公斤；若採用乙原料，每噸成本 1500 元，運費 400 元，可生產出產品 100 公斤。現在工廠的預算是成本不可超過 6000 元，運費不得超過 2000 元，請問在此預算下，最多可生產出多少公斤的產品？
ANS	假設甲原料用 x 噸，乙原料用 y 噸，則根據題目敘述可以列出限制式：$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 10x + 15y \leq 60 \\ 5x + 4y \leq 20 \end{cases}$

將這些方程式組的圖形畫在座標平面上所形成的區域稱之為可行解區域，唯有位於可行解區域內的點才能滿足所有的限制式。接下來的問題就是該如何在可行解區域中找出目標函數 $f(x,y) = 90x+100y$ 的最大值。首先需要畫出可行解區域，如左下圖。接下來考慮目標函數令 $90x+100y=k$，我們可以將 $90x+100y=k$ 視為一群平行 $9x+10y=0$ 的直線如右下圖。接下來觀察所有平行線的截距都可以 k 的型態表示（x截距$=\frac{k}{9}$，y截距 $=\frac{k}{10}$），由此可知在與可行解區域有交點的平行直線中，要找出最大的 k相當於求最大的x截距(or y截距)，從圖形中可以看出當平行線過C點時截距最大，所以當$x=\frac{12}{7}$ $y=\frac{20}{7}$時 $f(x,y)$ 會有最大值440。





頂點法

從另外一個角度看，當可行解範圍為一凸多邊形的時候，滿足限制式的目標函數極值必發生於頂點處，所以我們只需要一一檢視所有的頂點函數值就可以找出目標函數的最大及最小值。在處理變數不多的線性規劃問題時，頂點法會是一個簡單且方便的方法。但當維度拉高的同時我們需要代入的頂點數也會大量增加，這時頂點法就不會是一個聰明的選擇。

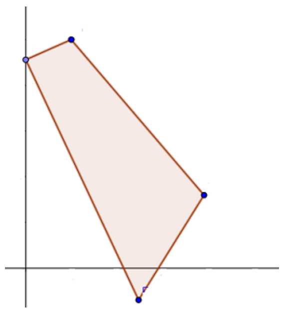
在這個例題我們只需要計算 (0,0) (4,0) (0,4) $(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$ 這四個點的函數值再加以比較即可算出最大值。

	(0,0)	(4,0)	(0,4)	$(\frac{12}{7},\frac{20}{7})$
$f(x,y)=90x+100y$	0	360	400	440

note

座標平面上x及y座標皆為整數的點稱為格子點，有時候因應題目限制我們的解必須要為整數(如:人數，車輛數…….)，這時我們用上述兩種方法找出來的解可能無法滿足需為整數這個需求，這時我們就要一一檢驗原來的解附近的格子點以求得整數中的最佳解。

小試身手

例題1	設 k 為一實數且 $A(k,2)$ $B(-4,k)$ 兩點在直線 $L:3x-4y+12=0$ 之同側，求實數 k 之範圍
例題2	設有一四邊形如圖所示，其四邊之直線方程式分別為 $x+y=6$，$x-y=3$，$3x+y=3$，$x-2y=-8$，則此四邊形之區域可用下列哪一組不等式來表示 
例題3	在$\begin{cases}x+2y\le 50\\4x+y\le 60\\x\ge 0,y\ge 0\end{cases}$ 的限制條件下，利用平行線法求目標函數 $P=x+5y$ 之極大以及極小值
例題4	承上題，利用頂點法求 $P=3x-y$ 之極大值以及極小值
例題5	若(x,y)為聯立方程組$\begin{cases}4x-5y+17\ge 0\\x+7y-4\ge 0\\5x+2y-20\le 0\end{cases}$ 所表示之範圍上一點，且 $P=kx-y$ 在(2,5)有極小值，求 k 之範圍
例題6	今有一農夫獨自承租一片山坡地，欲種植樟樹以及檳榔樹兩種樹木，樟樹每顆可讓農夫獲利一萬元，檳榔樹每顆獲利兩萬元，且山坡地最多只能種植 130 棵樹木。但政府水土保持計畫規定種植檳榔樹每棵扣兩點，樟樹每棵加一點，一片山坡地不得被扣 20 點以上，請問在不違反法規的條件下，農夫須採取何種種植策略方能創造最大獲利

解答與解析

例題1：$A(k,2)$ $B(-3,k)$ 兩點在直線L:$3x-4y+12=0$之同側

$\Rightarrow (3k-8+12)(-9-4k+12)>0$

$\Rightarrow (3k+4)(-4k+3)>0$

$\Rightarrow (3k+4)(4k-3)<0$

$\Rightarrow \frac{-4}{3} < k < \frac{3}{4}$

例題2：圖中斜率為負之直線有兩條：

較為水平者為$x+y=6$　圖形在左側: $x+y\leq 6$

較為鉛直者為$3x+y=3$　圖形在右側: $3x+y\geq 3$

斜率為正之直線有兩條

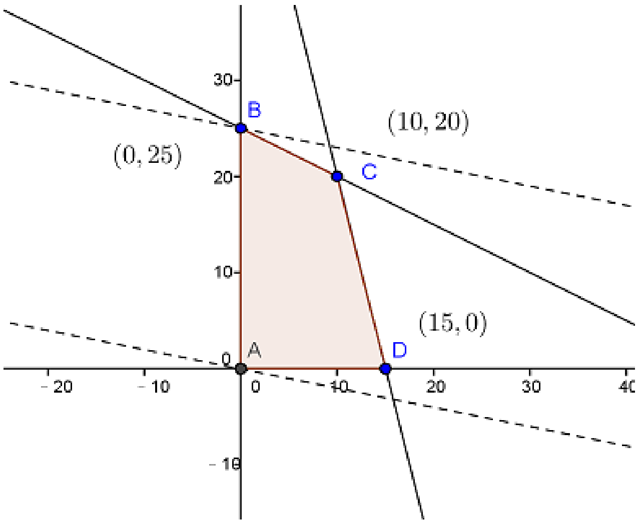
較為水平者為$x-2y=-8$　圖形在下方:$x-2y\geq -8$

較為鉛直者為$x-y=3$　圖形在上方:$x-y\leq 3$

例題3：作目標函數以及限制式之圖形如下圖所示，目標函數為一斜率為$\frac{-1}{5}$之直線，

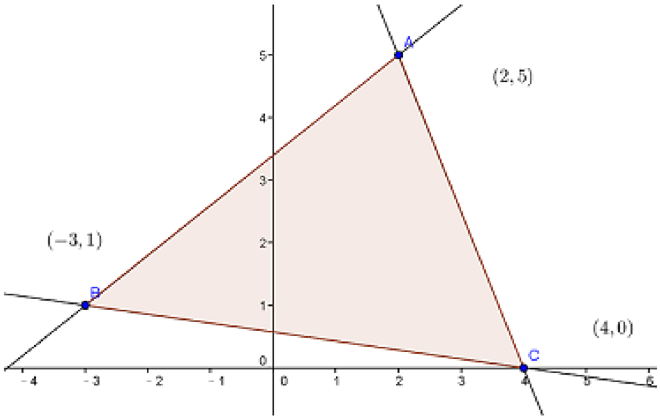
從圖中我們可以看到過點 (0,0) 之平行線所對應的P=0為最小值

而通過點(0,25)之平行線所對應的P=125為最大值



例題4：分別將四個頂點(0,0) (15,0) (10,20) (0,25)代入目標函數$P=3x-y$即可得知最大值為
P(15,0)=45，最小值為P(0,25)= -25

例題5：解聯立不等式$\begin{cases} 4x-5y+17\geq 0 \\ x+7y-4\geq 0 \\ 5x+2y-20\leq 0 \end{cases}$之圖形為如下圖之三角型區域



其頂點為(4,0) (2,5) (-3,1)

$P(4,0)=4k$

$P(2,5)=2k-5$

$P(-3,1)=-3k-1$

$\because P$在(2,5)有最小值

$\therefore \begin{cases} 2k-5\leq 4k \\ 2k-5\leq -3k-1 \end{cases} \Rightarrow \frac{-5}{2}\leq k\leq \frac{4}{5}$

例題6：設種植檳榔樹 x 棵，樟樹 y 棵

$\begin{cases} x+y\leq 130 \\ y-2x\geq -20 \\ x\geq 0, y\geq 0 \end{cases}$ 不等式作圖如下

目標函數 $f(x,y)=2x+y$，將四個頂點分別代入即可知最大值產生再$f(50,80)=180$

故此農夫應種植50棵檳榔樹，80棵樟樹以創造最大獲利