數學 4

進階講義

橢圓的極值與伸縮

淡水商工・蔡旭伶　老師

信望愛文教基金會

14-2-4~14-2-5　橢圓的極值與伸縮

定理敘述

1. 橢圓參數式

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$a,b>0$ 之參數式為 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

(2) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$a,b>0$ 之參數式為 $\begin{cases} x=h+a\cos\theta \\ y=k+b\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta<2\pi$

2. 柯西不等式

a,b,x,y 都是實數，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\ge(ax+by)^2$，等號成立時 $a:b=x:y$。

3. 正餘弦的疊合

$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$，其中 $\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

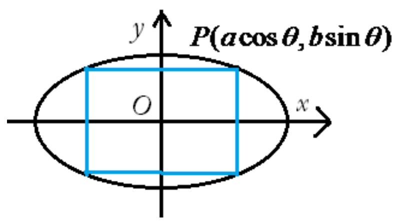
$-\sqrt{a^2+b^2}\le f(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$

定理證明或說明

橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad(a,b>0)$，

(1)內接最大矩形(邊與坐標軸平行)之面積為 $2ab$

(2)內接矩形之最大周長為 $4\sqrt{a^2+b^2}$。



證明：設橢圓上內接矩形在第一象限上的點

$P(a\cos\theta,b\sin\theta)$，如右圖所示

(1) 橢圓內接矩形在第一象限的圍成的面積為 $a\cos\theta\cdot b\sin\theta=\dfrac{ab}{2}\sin2\theta$，

當 $\sin2\theta=1$ 時有最大值 $\dfrac{ab}{2}$

內接矩形最大面積為 $\dfrac{ab}{2}\times4=2ab$

(2) 橢圓內接矩形在第一象限的圍成的部分周長為 $a\cos\theta+b\sin\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$ ，

最大值為 $\sqrt{a^2+b^2}$

內接矩形最大周長為 $4\sqrt{a^2+b^2}$

注意事項

橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上一點 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 參數式的 θ 不是 $\overline{OP}$ 和 x 軸的夾角。

關鍵字

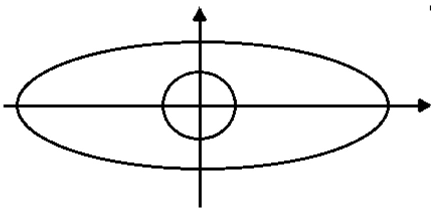
正弦、餘弦、科西不等式

例題 1

將圓 $x^2+y^2=2$ 沿著水平方向伸縮 5 倍，沿著鉛直方向伸縮 2 倍，可得一橢圓，求此橢圓的方程式與焦點坐標。

Ans：

如右圖所示



$a=5\sqrt{2}$ ，$b=2\sqrt{2}$ 的左右型橢圓

$c^2=50-8=42$

橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{50}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ，焦點 $(\pm\sqrt{42},0)$

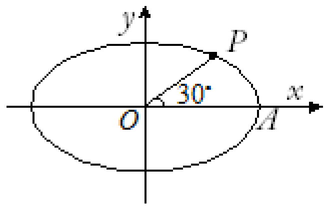
例題 2

設 O 為 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 之中心，A 為在 O 點右邊的頂點，且 $\angle POA=30^\circ$ ，求 P 點座標？

Ans：

如下圖所示，設 $\overline{OP}=r>0$ ，

$P(r\cos 30°, r\sin 30°)=(\frac{\sqrt{3}r}{2},\frac{r}{2})$ 代入橢圓方程式



$\frac{\frac{3r^2}{4}}{9}+\frac{\frac{r^2}{4}}{3}=1$，$\frac{r^2}{6}=1$，$r=\pm\sqrt{6}$ (負不合)，$P(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2})$

例題 3

橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上任一點 $P(x,y)$，求：(1) $x+3y$ 的最大值　(2) P 點到直線 $x+3y+10=0$ 的最大距離　。

Ans：

方法一：設 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上任一點 $P(x,y)=(3\cos\theta,2\sin\theta)$，$0\le\theta<2\pi$

(1) $x+3y=3\cos\theta+6\sin\theta=\sqrt{45}\sin(\theta+\phi)$，最大值 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) P 點到直線 $x+3y+10=0$ 的距=$\frac{|3\cos\theta+6\sin\theta+10|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|\sqrt{45}\cos(\theta+\phi)+10|}{\sqrt{10}}$

最大值 $=\frac{3\sqrt{5}+10}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{10}}{2}$

方法二：$P(x,y)$ 在橢圓上，$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

由柯西不等式 $(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})(3^2+6^2)\ge(x+3y)^2$，$45\ge(x+3y)^2$

$3\sqrt{5}\ge x+3y\ge -3\sqrt{5}$，最大值 $3\sqrt{5}$

例題 4

求橢圓 $2x^2+5y^2-4x-20y+12=0$ 內接矩形面積最大值及內接矩形周長最大值。

Ans：

$\frac{(x-1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$，面積最大值 $2ab=2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{10}$，

周長最大值 $4\sqrt{a^2+b^2}=4\sqrt{5+2}=4\sqrt{7}$ 。

溫故知新

習題 1

將圓 $x^2+y^2=1$ 沿著水平方向伸縮 3 倍，沿著鉛直方向伸縮 7 倍，可得一橢圓，求此橢圓的方程式與焦點坐標。

習題 2

橢圓 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上任一點 $P(x,y)$，求：(1) $2x+y$ 的最大值　(2) P 點到直線 $2x+y+1=0$ 的最大距離　。

習題 3

求橢圓 $25x^2+16y^2=400$ 內接矩形面積最大值及內接矩形周長最大值。

解答與解析

習題 1：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}=1$，$(0,\pm 2\sqrt{10})$

習題 2：(1) $4\sqrt{2}$　(2) $\dfrac{4\sqrt{10}+\sqrt{5}}{5}$

習題 3：面積最大值 40，周長最大值 $4\sqrt{41}$

延伸閱讀

三角函數、科西不等式