



# B5 3-1 推理證明



概念

## ① 認識證明 1



☆已知： $\overline{AD}$  和  $\overline{BC}$  相交於  $O$  點，

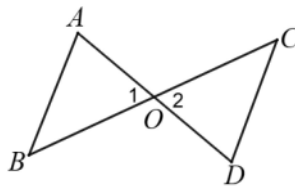
形成兩個  $\triangle OAB$  和  $\triangle OCD$

若  $\angle 1 = 50^\circ$ ，請問：

(1)  $\angle 2 =$  \_\_\_\_\_ 度。

(2)  $\angle A + \angle B =$  \_\_\_\_\_ 度。

(3)  $\angle C + \angle D =$  \_\_\_\_\_ 度。



☆不管  $\angle 1$  是幾度， $\angle A + \angle B$  都會等於  $\angle C + \angle D$  嗎？為什麼？

已知：\_\_\_\_\_

求證：\_\_\_\_\_

證明：

☆筆記

根據下面的敘述，寫出

已知和求證

等腰  $\triangle ABC$  中，

$\overline{AB} = \overline{AC}$ ，

則  $\angle B = \angle C$

已知：

求證：



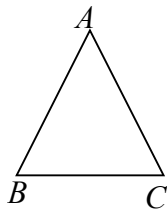
## 牛刀小試 1

請根據下列敘述，練習找出已知條件和求證項目。

1.  $\triangle ABC$  中，**若**  $\angle B = \angle C$ ，**則**  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

(1) 已知：\_\_\_\_\_

(2) 求證：\_\_\_\_\_

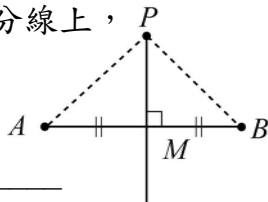


2. **若**  $P$  點在  $\overline{AB}$  的垂直平分線上，

**則**  $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

(1) 已知：\_\_\_\_\_

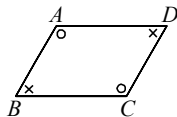
(2) 求證：\_\_\_\_\_



3. **若**  $ABCD$  為平行四邊形，**則** 對角相等。

(1) 已知：\_\_\_\_\_

(2) 求證：\_\_\_\_\_

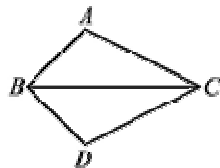


4. **若**  $\overline{AB} = \overline{BD}$ ， $\angle ABC = \angle DBC$

**則**  $\overline{AC} = \overline{CD}$ 。

(1) 已知：\_\_\_\_\_

(2) 求證：\_\_\_\_\_

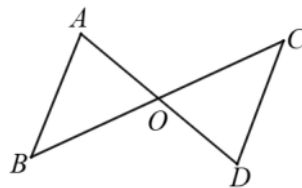




已知： $\overline{AD}$  和  $\overline{BC}$  相交於  $O$  點，形成兩個  $\triangle OAB$  和  $\triangle OCD$

求證： $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

證明：



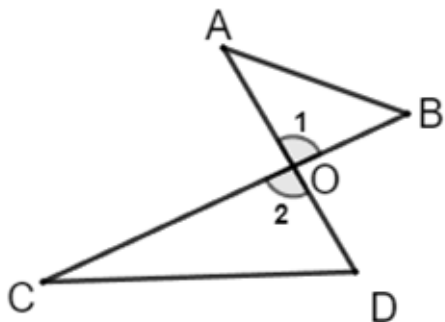
☆筆記

證明就是\_\_\_\_\_



## 牛刀小試 2

1. 如圖， $\overline{AD}$  與  $\overline{BC}$  交於  $O$  點，已知  $\angle A = 45^\circ$ ， $\angle C = 23^\circ$ ， $\angle D = 59^\circ$ ，則  $\angle B = ?$



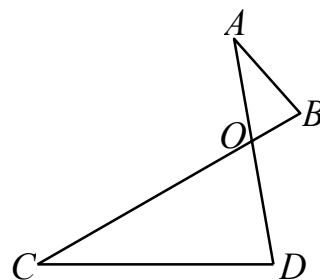
$\therefore \angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$  (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle \underline{\hspace{2cm}} + \angle \underline{\hspace{2cm}}$

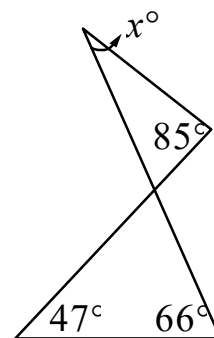
$\underline{\hspace{2cm}}^\circ + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ + \underline{\hspace{2cm}}^\circ$

$\angle B =$

2. 如圖， $\overline{AD}$  與  $\overline{BC}$  交於  $O$  點，已知  $\angle A = 32^\circ$ ， $\angle B = 78^\circ$ ， $\angle D = 80^\circ$ ，則  $\angle C = ?$



3. 如圖，求  $x = ?$





如圖： $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ ， $D$  是  $\overline{BC}$  的中點

證明： $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線

### 思考過程

1. 證明： $\overline{AD}$  是  $\angle BAC$  的角平分線

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

2. 已知：

①  $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

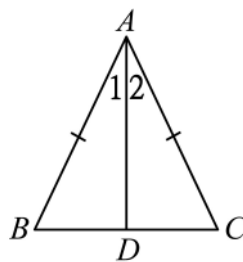
②  $D$  是  $\overline{BC}$  的中點

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

③ 隱藏條件

$\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

3. 利用 \_\_\_\_\_ 來證明



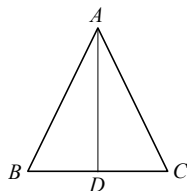
☆筆記  
證明要寫什麼？



### 牛刀小試 3

1. 如圖： $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  的中點。

求證： $\angle B = \angle C$



### 思考過程

(1) 已知：

①  $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle \Rightarrow$  \_\_\_\_\_

②  $D$  是  $\overline{BC}$  的中點  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

③ 隱藏條件  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(2) 利用 \_\_\_\_\_ 來證明

### 證明過程

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  中，

$\therefore$  ①  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_ (等腰 $\triangle$ )

②  $\overline{BD} =$  \_\_\_\_\_ ( $D$  為中點)

③  $\overline{AD} =$  \_\_\_\_\_ (共用邊)

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$  ( \_\_\_\_\_ 全等性質)

因此  $\angle B = \angle$  \_\_\_\_\_ (對應角相等)。

2. 已知  $P$  點是  $\angle ABC$  的角平分線上任一點。

證明： $\overline{PD} = \overline{PE}$

### 思考過程

(1) 證明： $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(2) 已知：

①  $P$  是  $\angle ABC$  的角平分線  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

② 「垂直」  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

③ 隱藏條件  $\Rightarrow$  \_\_\_\_\_

(3) 利用 \_\_\_\_\_ 來證明。

### 證明過程

$\triangle DBP$  和  $\triangle EBP$  中

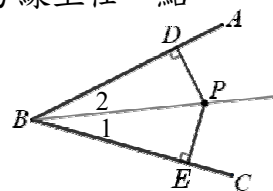
$\therefore$  ①  $\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ (角平分線)

②  $\angle BDP = \angle BEP =$  \_\_\_\_\_ 度  
(公用邊)

③  $\overline{BP} =$  \_\_\_\_\_ (共用邊)

$\therefore \triangle DBP \cong \triangle EBP$  ( \_\_\_\_\_ 全等性質)

因此  $\overline{PD} =$  \_\_\_\_\_ (對應邊相等)。

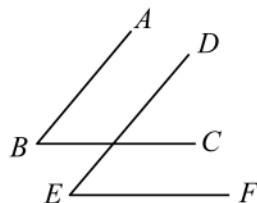




# 例題 ① 利用平行線性質證明 1——同位角



已知： $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$  求證： $\angle B = \angle E$



☆筆記

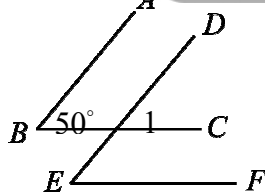
☆



## 牛刀小試 4

1.  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若  $\angle B = 50^\circ$ ，則  $\angle E$  幾度？



(1)  $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$  \_\_\_\_\_ 角相等

$\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ 度。

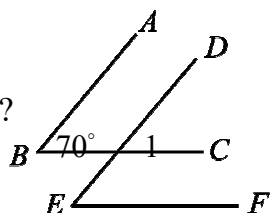
(2)  $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$  \_\_\_\_\_ 角相等

$\angle E = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ 度。



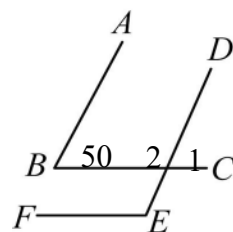
2.  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若  $\angle B = 70^\circ$ ，則  $\angle E$  幾度？



3.  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若  $\angle B = 50^\circ$ ，則  $\angle E$  幾度



(1)  $\because \overline{AB} \parallel \overline{DE} \therefore$  \_\_\_\_\_ 角相等

$\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ 度。

(2)  $\because \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (平角)

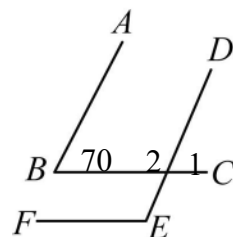
$\therefore \angle 2 =$  \_\_\_\_\_ 度。

(3)  $\because \overline{BC} \parallel \overline{EF} \therefore$  \_\_\_\_\_ 角相等

$\angle E = \angle$  \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ 度。

4.  $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ ， $\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ ，

若  $\angle B = 70^\circ$ ，則  $\angle E$  幾度





## 例題 ② 利用平行線性質證明 2——平行四邊形



請證明平行四邊形對角相等

已知：\_\_\_\_\_

求證：\_\_\_\_\_

證明：

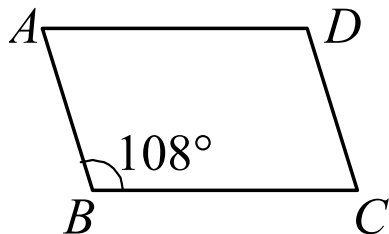


☆筆記



### 牛刀小試 5

1. 如圖， $\square ABCD$  中， $\angle B = 108^\circ$ ，求其他三個內角的度數。



(1)  $\because$  平行四邊形\_\_\_\_\_角相等

$$\therefore \angle D = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

(2)  $\because$  平行四邊形\_\_\_\_\_角互補

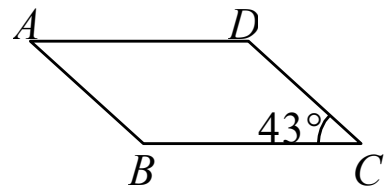
$$\angle A + \angle B = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

$$\angle A = \underline{\hspace{2cm}}^\circ - 108^\circ = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

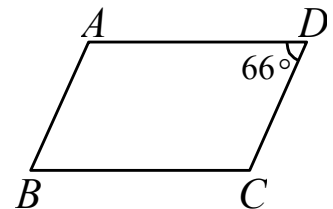
(3)  $\because$  平行四邊形\_\_\_\_\_角相等

$$\angle C = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$$

2. 如圖， $\square ABCD$  中， $\angle C = 43^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

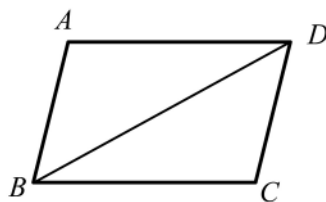


3. 如圖， $\square ABCD$  中， $\angle D = 66^\circ$ ，求其他三個內角的度數。

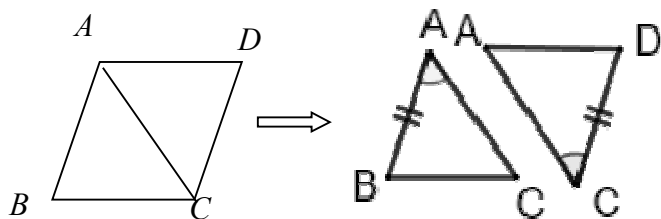


**例題****③****利用三角形的全等性質證明 1——平行四邊形**已知：四邊形  $ABCD$  是平行四邊形求證： $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ 

證明：



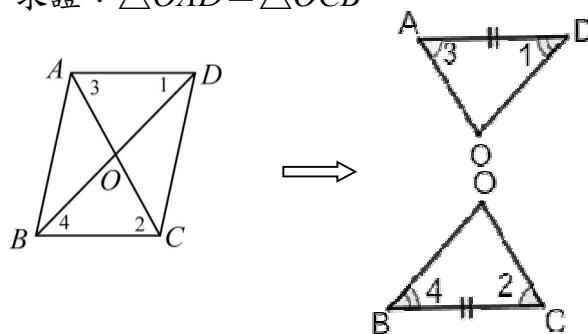
☆筆記

**牛刀小試 6**1. 如右圖，已知  $\triangle ADB$  和  $\triangle CDB$  中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且  $\angle BAC = \angle ACD$ 。試證  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ 

證明：

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle CDA$  中 $\therefore$  ①  $\overline{AB} =$  \_\_\_\_\_ (已知)②  $\angle BAC =$  \_\_\_\_\_ (已知)③  $\overline{AC} =$  \_\_\_\_\_ (公用邊) $\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$  (\_\_\_\_\_ 全等性質)

2. 證明平行四邊形兩對角線互相平分。

已知： $ABCD$  為平行四邊形。求證： $\triangle OAD \cong \triangle OCB$ 

證明：

在  $\triangle OAD$  和  $\triangle OCB$  中， $\therefore ABCD$  為平行四邊形 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ①  $\angle 1 = \angle 4$  (\_\_\_\_\_ 角相等)②  $\angle 3 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)③  $\overline{AD} =$  \_\_\_\_\_ (對邊相等) $\therefore \triangle OAD \cong \triangle OCB$  (\_\_\_\_\_ 全等性質)

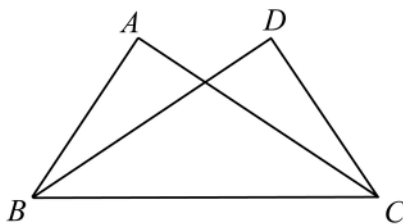
**例題****4****利用三角形的全等性質證明 2——重疊圖形**

如圖，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

已知： $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$

求證： $\angle A = \angle D$

證明：

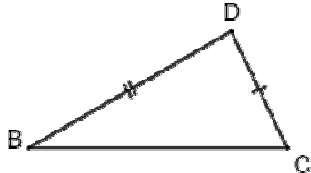
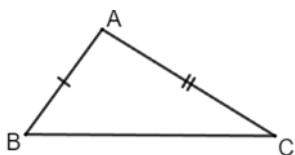
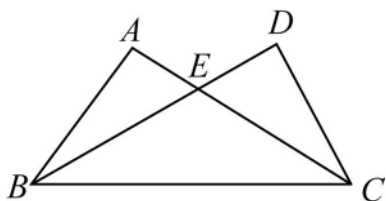


☆筆記

**牛刀小試 7**

1.  $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{BD}$ ，

求證： $\angle ACB = \angle DBC$



證明：

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中

①  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_ (已知)

②  $\overline{AC} =$ \_\_\_\_\_ (已知)

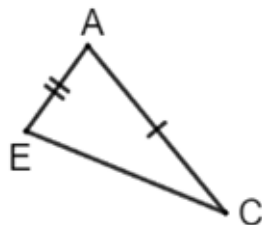
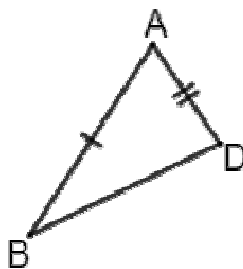
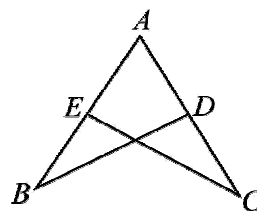
③  $\overline{BC} =$ \_\_\_\_\_ (共用邊)

$\triangle ABC \cong \triangle$ \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_全等)

故 $\angle ACB =$ \_\_\_\_\_ (對應角相等)

2. 已知： $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{AE}$ ，

求證： $\overline{BD} = \overline{CE}$



證明：

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

①  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_ (已知)

②  $\overline{AD} =$ \_\_\_\_\_ (已知)

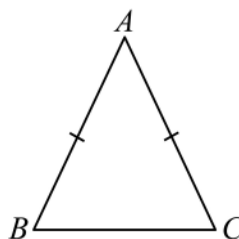
③  $\angle A =$ \_\_\_\_\_ (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle$ \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_全等)

故 $\overline{BD} =$ \_\_\_\_\_ (對應邊相等)

**例題****5****利用三角形的全等性質證明 3——輔助線**已知： $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ 求證： $\angle B = \angle C$ 

證明：

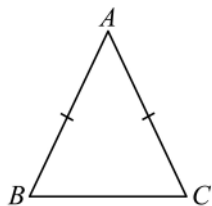
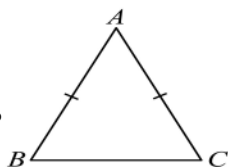
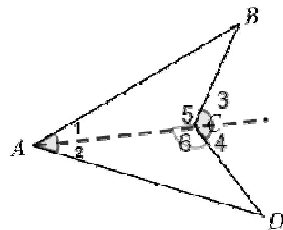
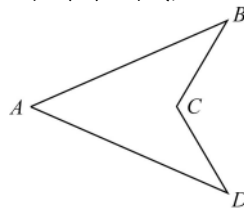


☆筆記

**牛刀小試 8**1.  $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ ， $\angle A = 40^\circ$ ，求  $\angle B = ?$  $\because \triangle ABC$  為等腰 $\triangle$  $\therefore \angle B = \angle$  \_\_\_\_\_

$$= \frac{180^\circ - \angle A}{2} = \frac{180 - ( \quad )}{2}$$

=

2.  $\triangle ABC$  為等腰 $\triangle$ ， $\angle B = 50^\circ$ ，求  $\angle A = ?$ (1)  $\because \triangle ABC$  為等腰 $\triangle$  $\therefore \angle C = \angle$  \_\_\_\_\_  $=$  \_\_\_\_\_  $^\circ$ (2)  $\angle A =$  \_\_\_\_\_3. 如圖，試證  $\angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D$ 證明：(1) 連結  $\overline{AC}$  並延伸  $\overline{AC}$ ，作  $\overrightarrow{AC}$ (2)  $\triangle ABC$  中 $\because \angle$  \_\_\_\_\_ 是  $\triangle ABC$  的外角 $\therefore \angle$  \_\_\_\_\_  $= \angle 1 + \angle B$ (3)  $\triangle ADC$  中 $\because \angle$  \_\_\_\_\_ 是  $\triangle ADC$  的外角 $\therefore \angle$  \_\_\_\_\_  $= \angle 2 + \angle D$ 

由 (2) + (3)

$$\begin{aligned} \angle BCD &= \boxed{\angle \quad} + \boxed{\angle \quad} \\ &= \boxed{\angle \quad + \angle B} + \boxed{\angle \quad + \angle D} \\ &= \boxed{\angle \quad + \angle \quad} + \angle B + \angle D \\ &= \boxed{\angle A} + \angle B + \angle D \end{aligned}$$

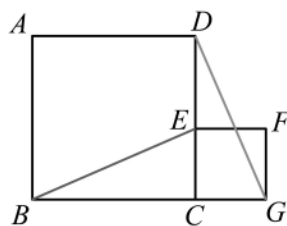
**例題****6****利用三角形的全等性質證明 4—正方形**

已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $CEFG$  都是正方形，

而且  $E$  在  $\overline{CD}$  上

求證： $\overline{BE} = \overline{DG}$

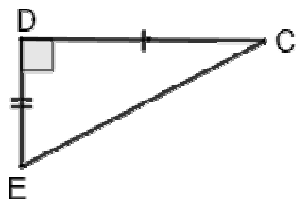
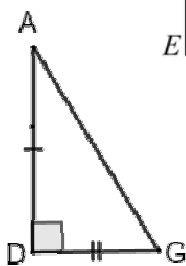
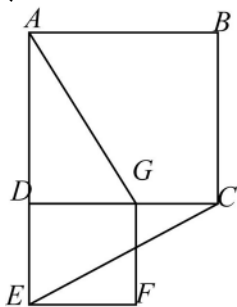
證明：



☆筆記

**牛刀小試 9**

1. 已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $DEFG$  都是正方形。求證  $\overline{AG} = \overline{CE}$ 。



證明：

在  $\triangle ADG$  和  $\triangle CDE$  中

①  $\overline{DG} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $DEFG$  是正方形)

②  $\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $ABCD$  是正方形)

③  $\angle ADG = \angle CDE = \underline{\hspace{2cm}}$  度

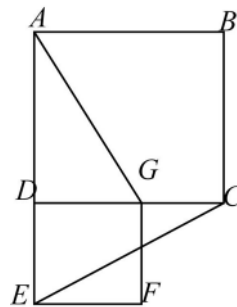
$\triangle ADG \cong \triangle CDE$  ( $\underline{\hspace{2cm}}$  全等)

故  $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$  (對應邊相等)

2. 已知：四邊形  $ABCD$  和四邊形  $DEFG$  都是正方形。若  $\overline{DG} = 5$ ， $\overline{AD} = 12$ ，

(1)  $\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $\overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$



$$(1) \overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2}$$

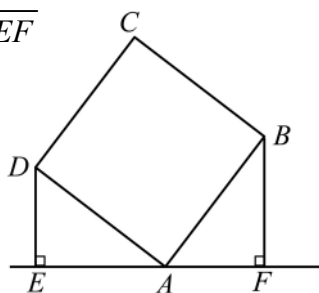
$$= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$$

**例題****7****利用三角形的全等性質證明 5——直角三角形**

已知： $ABCD$  是正方形，而且  $\overline{DE} \perp \overline{EF}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{EF}$

求證： $\overline{DE} = \overline{AF}$

證明：



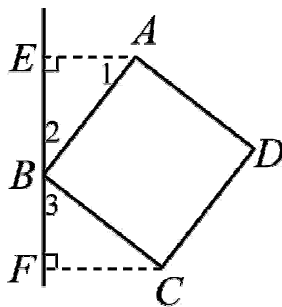
☆筆記

**牛刀小試 10**

1. 四邊形  $ABCD$  為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

$\overline{BF} \perp \overline{CF}$

(1) 試證： $\overline{AE} = \overline{BF}$



證明：

在  $\triangle AEB$  和  $\triangle BFC$  中

①  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $ABCD$  是正方形)

②  $\angle AEB = \angle BFC = \underline{\hspace{2cm}}$   
( $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ， $\overline{BF} \perp \overline{CF}$ )

③  $\because \angle 1 + \angle 2 = \underline{\hspace{2cm}}$  度

$\angle 2 + \angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$  度

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3$

推得  $\angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$

$\triangle ADG \cong \triangle CDE$  ( $\underline{\hspace{2cm}}$  全等)

故  $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$  (對應邊相等)

2. 四邊形  $ABCD$  為正方形， $\overline{AE} \perp \overline{BE}$ ，

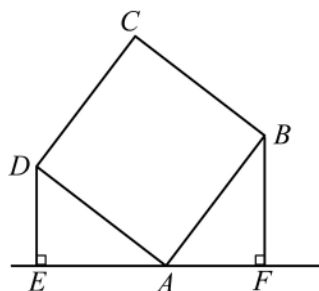
$\overline{BF} \perp \overline{CF}$ ，若  $\overline{DE} = 3$ ， $\overline{BF} = 4$ ，

求

(1)  $\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2)  $\overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(3)  $\overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



$\because \triangle DEA \cong \triangle AFB$  ( $\underline{\hspace{2cm}}$  全等)

$\therefore \overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AE} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{BF}^2}$

$= \sqrt{(\underline{\hspace{2cm}})^2 + (\underline{\hspace{2cm}})^2}$

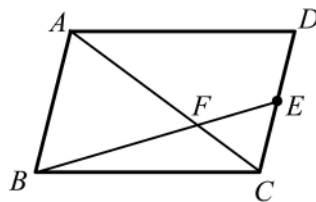


## 例題 8 利用相似性質來證明



已知：如圖，在  $\square ABCD$  中， $E$  為  $\overline{CD}$  中點， $\overline{BE}$  和  $\overline{AC}$  交於  $F$

求證： $\overline{AF} = 2\overline{CF}$

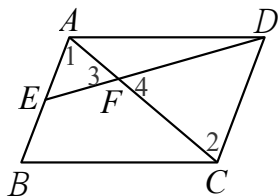


☆筆記



## 牛刀小試 11

1. 如圖，平行四邊形  $ABCD$  中，已知  $E$  為  $\overline{AD}$  的中點， $\overline{AC}$  與  $\overline{BE}$  交於  $F$  點，  
求證：(1)  $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ 。



證明：

在  $\triangle AEF$  和  $\triangle CDF$  中

(1)  $\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

(2)  $\angle 3 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

$\triangle AEF \sim \triangle CDF$  (\_\_\_\_\_ 相似)

2. 呈上題，若  $\overline{AF} = 6$ ，則  $\overline{CF} = ?$

(1)  $\because \triangle AEF \sim \triangle CDF$  且  $E$  為  $\overline{AD}$  的中點

$\therefore \overline{AE} : \overline{DC} = \overline{AE} : \overline{AB} =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_

表示  $\triangle CDF$  是  $\triangle AEF$  的 \_\_\_\_\_ 倍放大圖

(2)  $\overline{AF} : \overline{CF} = \overline{AE} : \overline{AB} =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_

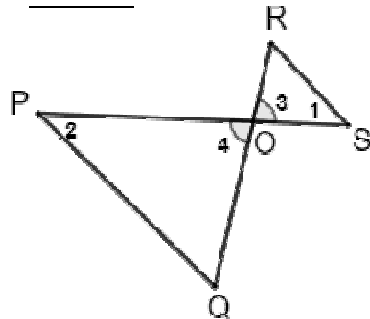
( ) :  $\overline{CF} =$  \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_

$\overline{CF} =$  \_\_\_\_\_

3. 如圖， $\overline{PS}$  與  $\overline{QR}$  交於  $O$  點，

已知  $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$ ，且  $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

$\overline{PQ} = 12$ ，則  $\overline{RS} =$  \_\_\_\_\_。



(1)  $\because \overline{RS} \parallel \overline{PQ}$

①  $\angle 1 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

②  $\angle 3 = \angle$  \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_\_ 角相等)

$\therefore \triangle SRO \sim \triangle PQO$  (\_\_\_\_\_ 相似)

(2) 因為  $\overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$ ，

所以  $\triangle PQO$  是  $\triangle SRO$  的 \_\_\_\_\_ 倍放大圖

$\overline{PQ} : \overline{RS} = \overline{PO} : \overline{SO} = 3 : 1$

( ) :  $\overline{RS} = 3 : 1$

$\overline{RS} =$  \_\_\_\_\_



## 概念 4 奇數和偶數



舉例：

1. 偶數：\_\_\_\_\_

☆換個寫法：\_\_\_\_\_

**問題**：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的偶數**？

2. 奇數：\_\_\_\_\_

☆換個寫法：\_\_\_\_\_

**問題**：有沒有辦法可以寫出世界上**所有的奇數**？

☆筆記

① 0 是奇數還是偶數？

② 3 的倍數如何表示？



### 牛刀小試 12

1. (1) 請寫出 4 個偶數：\_\_\_\_\_。

(2) 請寫出 4 個奇數：\_\_\_\_\_。

(3) 請寫出 4 個整數：\_\_\_\_\_。

**注意**：整數包含奇數和偶數

2. 若  $a$  是**奇數**，則下列各題是奇數或偶數

(1)  $2a$  為\_\_\_\_\_數

**代數字判斷**  $2a = 2 \times ( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $2a+1$  為\_\_\_\_\_數

**代數字判斷**  $2a+1 = 2 \times ( \quad ) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

(3)  $2(a+3)$  為\_\_\_\_\_數

**代數字判斷**  $2(a+3) = 2 \times [ ( \quad ) + 3 ] = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 若  $b$  是**偶數**，則下列各題是奇數或偶數

(1)  $b+1$  為\_\_\_\_\_數

**代數字判斷**  $b+1 = ( \quad ) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $b+2$  為\_\_\_\_\_數

**代數字判斷**  $b+2 = ( \quad ) + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 若  $c$  是**整數**，則下列各題是奇數或偶數或都有可能

(1)  $c+1$  為\_\_\_\_\_

**奇**  $c+1 = ( \quad ) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

**偶**  $c+1 = ( \quad ) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

(2)  $2c$  為\_\_\_\_\_

**奇**  $2c = 2 \times ( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}}$

**偶**  $2c = 2 \times ( \quad ) = \underline{\hspace{2cm}}$



## 例題 9 代數證明 1——奇數和偶數



已知： $a$  是一個奇數

求證： $a^2$  也是奇數

證明：

☆筆記



### 牛刀小試 13

1. 已知： $a$  是偶數，則  $a^2$  一定是偶數 嗎？

(1) 若  $a = 2$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a^2$  是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若  $a = 4$ ，

$$a^2 = (\quad) \times (\quad) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a^2$  是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 已知： $a$  是偶數。

求證： $a^2$  也是偶數。

證明：

$\because a$  是偶數，假設  $a = 2k$ ，

(其中  $k$  是        數)

$$\therefore a^2 = (\underline{\hspace{2cm}})^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故  $a^2$  也是偶數。

3. 已知： $a$  是奇數，則  $a+1$  一定是偶數 嗎？

(1) 若  $a = 1$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$  是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

(2) 若  $a = 3$ ，

$$a+1 = (\quad) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$a+1$  是 ☐ 奇數 ☐ 偶數

2. 若  $a$  為奇數。

試證： $a+1$  為偶數。

證明：

$\because a$  是奇數，假設  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(其中  $k$  是整數)

$$\therefore a+1 = (\underline{\hspace{2cm}}) + 1 = 2k+2$$

$$= 2 \times (\underline{\hspace{2cm}})$$

$$= 2 \times \underline{\hspace{2cm}} \text{ 數}$$

故  $a+1$  也是偶數。



## 例題 10 代數證明 2——比大小



已知： $a$ 、 $b$  是正數，而且  $a > b$

求證： $a^2 > b^2$

證明：

☆筆記

若  $a$ 、 $b$  是正數， $a^2 > b^2$

則  $a \square b$



### 牛刀小試 14

1. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1)  $7 \square 3 \Rightarrow 7^2 \square 3^2$

(2)  $5 \square 2 \Rightarrow 5^2 \square 2^2$

若  $a$ 、 $b$  是正數，而且  $a > b$ ，

則  $a^2 \square b^2$

2. 在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1)  $5^2 \square 4^2$ ，但  $5 \square 4$

(2)  $7^2 \square 3^2$ ，但  $7 \square 3$

若  $a$ 、 $b$  是正數，而且  $a^2 > b^2$

則  $a \square b$

3. 若  $a$ 、 $b$  為負數，且  $a < b$ 。

那麼  $a^2$  會小於  $b^2$  嗎？

在下列式子中，填入「 $>$ 、 $=$ 、 $<$ 」

(1)  $(-7) \square (-3) \Rightarrow (-7)^2 \square (-3)^2$

(2)  $(-5) \square (-2) \Rightarrow (-5)^2 \square (-2)^2$

若  $a$ 、 $b$  是負數，且  $a < b$

則  $a^2 \square b^2$

4. 已知： $a$ 、 $b$  為負數，且  $a < b$ 。

求證： $a^2 > b^2$

證明：

$$\because a < b < 0 \quad \therefore a - b \square 0,$$

$$\therefore a、b \text{ 為負數 } \therefore a + b \square 0$$

$$a^2 - b^2 = (\quad)(\quad) \square 0$$

故  $a^2 > b^2$



# 例題 11 代數證明 3——畢氏定理



已知： $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別為直角 $\triangle$ 的三邊長，而且  $c$  是斜邊  
(其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是正整數)

求證： $a^2$  是  $(b+c)$  的倍數

證明：

☆筆記  
因數和倍數



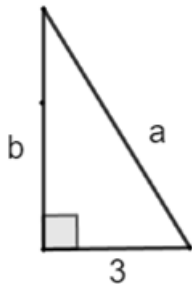
## 牛刀小試 15

1. 在直角 $\triangle$ 中， $a$  為斜邊長， $b$ 、 $3$  為兩股長。

其中  $a$ 、 $b$  為正整數，

請問：下列哪一個數是  $(a+b)$  的倍數？

(A) 7 (B) 8 (C) 9



(1)  $\because a$ 、 $b$ 、 $3$  為直角三角形的三邊長，

且  $a$  為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 3^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

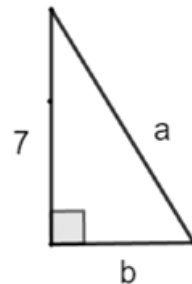
故  $\underline{\hspace{2cm}}$  是  $(a+b)$  的倍數。

2. 已知直角 $\triangle$ 中， $b$  為斜邊長，

$a$ 、 $7$  為兩股長，其中  $a$ 、 $b$  為正整數，

請問： $(a-b)$  為下列哪一個數的因數？

(A) 25 (B) 36 (C) 49



(1)  $\because a$ 、 $b$ 、 $7$  為直角三角形的三邊長，

且  $a$  為斜邊長，

$$\therefore b^2 + 7^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2) \quad a^2 - b^2 = (\underline{\hspace{1cm}})^2$$

$$(\underline{\hspace{1cm}} + b)(\underline{\hspace{1cm}} - b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

故  $(a-b)$  為  $\underline{\hspace{2cm}}$  的因數。



# 解 答 篇

## 牛刀小試 1

1. 已知:  $\angle B = \angle C$

求證:  $\overline{AB} = \overline{AC}$

2. 已知:  $P$  在  $\overline{AB}$  的中垂線上

求證:  $\overline{PA} = \overline{PB}$

3. 已知:  $ABCD$  為平行四邊形

求證: 對角相等

4. 已知:  $\overline{AB} = \overline{BD}$ ,  $\angle ABC = \angle DBC$

求證:  $\overline{AC} = \overline{CD}$

## 牛刀小試 2

1.

$\therefore \angle 1 = \angle 2$  (對頂角相等)

$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D$

$\underline{45^\circ} + \angle B = \underline{23^\circ} + \underline{59^\circ}$

$\angle B = 37^\circ$

2.  $30^\circ$

3.  $28^\circ$

## 牛刀小試 3

1. (1) ①  $\overline{AB} = \overline{AC}$

②  $\overline{BD} = \overline{CD}$

③  $\overline{AD} = \overline{AD}$

(2) SSS 全等性質

證明過程

在  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  中,

$\therefore \overline{AB} = \overline{AC}$

$\overline{BD} = \overline{CD}$

$\overline{AD} = \overline{AD}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$

(SSS 全等性質)

因此  $\angle B = \angle C$

2. (1)  $\overline{PD} = \overline{PE}$

(2) ①  $\angle 1 = \angle 2$

②  $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

③  $\overline{BP} = \overline{BP}$  (共用邊)

(3) AAS 全等性質

證明過程

$\triangle DBP$  和  $\triangle EBP$  中

(1)  $\angle 1 = \angle 2$  (角平分線)

(2)  $\angle BDP = \angle BEP = 90^\circ$

(3)  $\overline{BP} = \overline{BP}$  (共用邊)

$\triangle DBP \cong \triangle EBP$  (AAS 全等)

故  $\overline{PD} = \overline{PE}$

## 牛刀小試 4

1. (1) 同位,  $\angle B$ , 50

(2) 同位,  $\angle 1$ , 50

2. 70 度

3. (1) 同位,  $\angle B$ , 50

(2) 130

(3) 同位,  $\angle 2$ , 130

4. 110 度

## 牛刀小試 5

1. (1) 對角,  $\angle B$ , 108

(2) 鄰角, 180, 180, 72

(3) 對角,  $\angle A$ , 72

2.  $\angle A = 43^\circ$ ,  $\angle B = 137^\circ$

$\angle D = 137^\circ$

3.  $\angle A = 114^\circ$ ,  $\angle B = 66^\circ$

$\angle C = 114^\circ$

## 牛刀小試 6

1.  $\overline{DC}$ ,  $\angle DCA$ ,  $\overline{AC}$  SAS,

2. 內錯,  $\angle 2$ , 內錯,  $\overline{BC}$ , ASA,

## 牛刀小試 7

1.  $\triangle ABC$  和  $\triangle DCB$  中

①  $\overline{AB} = \overline{DC}$

②  $\overline{AC} = \overline{BD}$

③  $\overline{BC} = \overline{BC}$

$\triangle ABC \cong \triangle DCB$  (SSS 全等)

故  $\angle ACB = \angle DBC$

2.  $\triangle ABD$  和  $\triangle AEC$  中

①  $\overline{AB} = \overline{AC}$

②  $\overline{AD} = \overline{AE}$

③  $\angle A = \angle A$  (共用角)

$\triangle ABD \cong \triangle AEC$  (SAS 全等)

故  $\overline{BD} = \overline{CE}$

## 牛刀小試 8

1.  $\angle D$ , 40, 70 度

2. (1)  $\angle B$ , 50,

(2) 80 度

3. (1)  $\angle 3$ ,  $\angle 3$

(2)  $\angle 4$ ,  $\angle 4$

(3)  $\angle 3$ ,  $\angle 4$ ,  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ ,  
 $\angle 1$ ,  $\angle 2$

## 牛刀小試 9

1. 在  $\triangle ADG$  和  $\triangle CDE$

$\therefore$  ①  $\overline{DG} = \overline{DE}$

②  $\overline{AD} = \overline{DC}$

③  $\angle ADG = \angle CDE = 90^\circ$

$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDE$  (SAS 全等)

故  $\overline{AG} = \overline{CE}$

2. (1) 13 (2) 13

## 牛刀小試 10

1. (1) 在  $\triangle AEB$  和  $\triangle BFC$

$\therefore$  ①  $\overline{AB} = \overline{BC}$

②  $\angle AEB = \angle BFC$

③  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$

$\therefore \triangle AEB \cong \triangle BFC$  (AAS 全等)

故  $\overline{AE} = \overline{BF}$

2. (1) 4

(2) 3

(3) 5

## 牛刀小試 11

1. (1)  $\angle 2$ , 內錯

(2)  $\angle 4$ , 對頂

2. (1) 1:2, 2

(2) 6, 1:2, 12

3. (1) ①  $\angle 2$ , 內錯

②  $\angle 4$ , 對頂, AA

(2) 12, 4

## 牛刀小試 12

1. (1) 2, 4, 6, 8, 10, ...

(2) 1, 3, 5, 7, 9, ...

(3) 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

2. (1) 偶, 1, 2

(2) 奇, 1, 3

(3) 偶, 1, 8

3. (1) 奇, 2, 3

(2) 偶, 2, 4

4. (1) 都有可能

1, 2,

2, 3

(2) 偶

1, 2

2, 4

#### 牛刀小試 13

1. (1)  $2 \times 2 = 4$ , 偶

(2)  $4 \times 4 = 16$ , 偶

2.  $\because a$  是偶數

設  $a = 2k$  ( $k$  為整數)

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$= 2 \times (2k^2)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

$\therefore a^2$  也是偶數

3. (1) 1, 2, 偶

(2) 3, 4, 偶

4.  $\because a$  是奇數, 設  $a = 2k + 1$

( $k$  為整數)

$$a + 1 = (2k + 1) + 1$$

$$= 2k + 2$$

$$= 2 \times (k + 1)$$

$$= 2 \times \text{整數}$$

故  $a + 1$  是偶數

#### 牛刀小試 14

1. (1)  $>$ ,  $>$

(2)  $>$ ,  $>$

$>$

2. (1)  $>$ ,  $>$

(2)  $>$ ,  $>$

$>$

3. (1)  $<$ ,  $>$ ,  $>$

(2)  $<$ ,  $>$

(4)  $<$ ,  $<$

$(a+b)(a-b)$ ,  $>$

#### 牛刀小試 15

1. C

(1)  $a^2$

(2)  $3^2$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $9$ ,  $9$

2. C

(1)  $a^2$

(2)  $7^2$ ,  $a$ ,  $a$ ,  $49$ ,  $49$