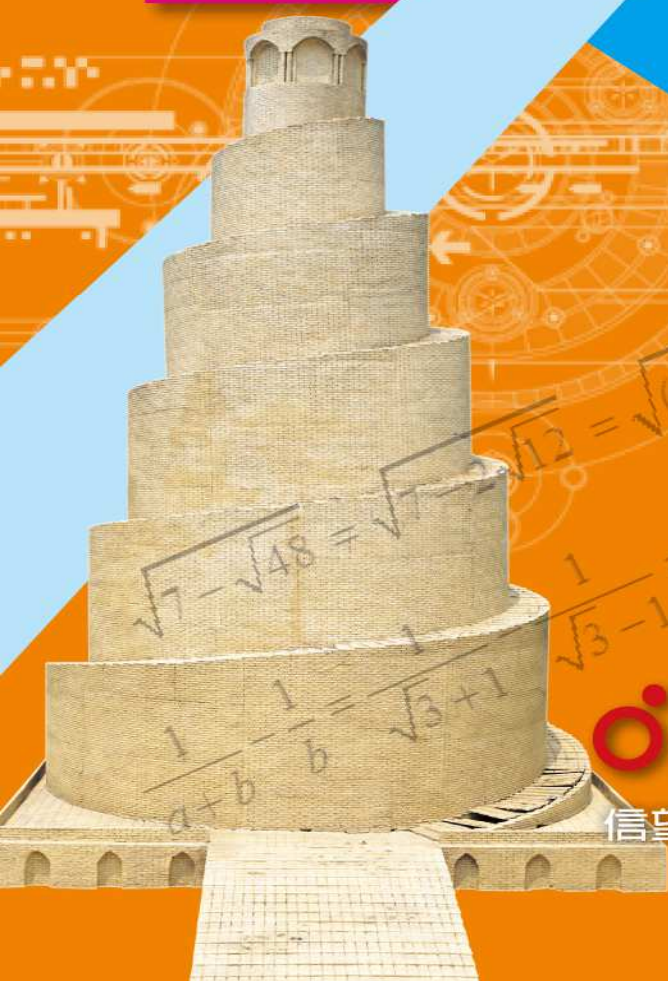


高中數學

進階
講義

樣本空間與事件

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

≡

It99ok231 樣本空間與事件

主題一、樣本空間與事件

1. 一項試驗中所有可能發生的結果所形成的集合叫做樣本空間。
2. 事件：
 - (1) 樣本空間的任一子集稱為一個事件。
 - (2) 當兩事件 A 與 B 不可能同時發生，即 $A \cap B = \emptyset$ 時，稱 A, B 為互斥事件。

【例題 1】 【配合課本例 1】

丟一個硬幣 3 次，觀察依次出現正面或反面，寫出其樣本空間。

【詳解】

假設 (x, y, z) 依序代表第一次、第二次和第三次擲出的正反面情形，則樣本空間

$$S = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$$

【類題 1】

甲乙兩人以「刀、石、布」猜拳，寫出其樣本空間。

【詳解】

以序對 (x, y) 表示甲與乙所出的分別為 x 與 y ，

且以「刀、石、布」代表兩人所出的拳。則樣本空間

$$S = \{(\text{刀}, \text{刀}), (\text{刀}, \text{石}), (\text{刀}, \text{布}), (\text{石}, \text{刀}), (\text{石}, \text{石}), (\text{石}, \text{布}), (\text{布}, \text{刀}), (\text{布}, \text{石}), (\text{布}, \text{布})\}.$$

【例題 2】 【配合課本例 2】

袋子中裝有編號 1, 2, 3 的三個球，分別依下列方法從袋中取球並觀察號碼，求以下各試驗的樣本空間。

(1) 取球二次，每次 1 球，球取出後均不放回。

(2) 取球二次，每次 1 球，球取出後均再放回。

(3) 同時取出 2 球。

【詳解】

(1) 設 (x, y) 表示第一次抽出 x 號，第二次抽出 y 號，則樣本空間

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

(2) 設 (x, y) 表示第一次抽出 x 號，第二次抽出 y 號，則樣本空間

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

(3) 設 $x \wedge y$ 表示同時取出的 2 球號碼為 x 和 y ，

$$\text{則樣本空間 } S = \{1 \wedge 2, 1 \wedge 3, 2 \wedge 3\}.$$

【類題 2】

袋子中裝有編號 1, 2, 3, 4 的四張卡片，分別依下列方法從袋中取卡片並觀察號碼，求以下各試驗的樣本空間。

- (1) 取出一張。
- (2) 同時取出二張。
- (3) 取二次，每次一張，取出後不放回。

【詳解】

$$(1) \quad S = \{1, 2, 3, 4\} .$$

(2) 設 $x \wedge y$ 表示同時取出的 2 張卡片號碼為 x 和 y ，則

$$S = \{1 \wedge 2, 1 \wedge 3, 1 \wedge 4, 2 \wedge 3, 2 \wedge 4, 3 \wedge 4\} .$$

(3) 設 (x, y) 表示第一次抽出 x 號，第二次抽出 y 號，則

$$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\} .$$

【例題 3】 **【配合課本例 3】**

連續丟一個硬幣三次，觀察依次出現正面或反面的情形。若 A 表示恰好出現二次反面的事件， B 表示至少出現二次正面的事件。用集合表示事件 A, B 。

【詳解】

以 (x, y, z) 代表依次丟出的結果，則

$$A = \{(\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正})\},$$

$$B = \{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{正})\} .$$

【類題 3】

連續丟一個硬幣四次，觀察依次出現正面或反面的情形。若 A 表示恰好出現一次反面的事件， B 表示四次出現同一面的事件。用集合表示事件 A, B 。

【詳解】

以 (x, y, z, u) 代表依次丟出的結果，則

$$A = \{(\text{反}, \text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{正}, \text{反})\},$$

$$B = \{(\text{反}, \text{反}, \text{反}, \text{反}), (\text{正}, \text{正}, \text{正}, \text{正})\} .$$

【例題 4】【配合課本例 4】

擲大小兩顆骰子，若 A 表示兩骰子點數乘積為 8 的事件， B 表示兩骰子點數和為 8 的事件。則 A, B 兩事件是否為互斥事件？

Ans： 是

【詳解】

設 (x, y) 表示大小兩骰子擲出的點數分別為 x 與 y ，則

$$A = \{(2, 4), (4, 2)\},$$

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\},$$

因為 $A \cap B = \emptyset$ ，所以 A, B 為互斥事件。

【類題 4】

袋中有編號 1, 2, 3, 4, 5 的五個球，從中取球二次，每次一球，球取出後均再放回。若 A 表示所取得的球號均為偶數的事件， B 表示所取得的球號差為 2 的事件。則 A, B 兩事件是否為互斥事件？

Ans： 不是

【詳解】

設 (x, y) 表示第一次抽出 x 號，第二次抽出 y 號，則

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (4, 2)\},$$

$$B = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (5, 3)\}.$$

因為 $A \cap B \neq \emptyset$ ，所以 A, B 不是互斥事件。

【例題 5】【配合課本例 5】

人的血型有 A, B, AB 與 O 四種，今有夫妻二人，若 P 表示兩人血型一樣的事件， Q 表示兩人至少有一人為 O 型的事件。求

- (1) P 和 Q 都發生的事件。
- (2) P 或 Q 發生的事件。

【詳解】

設 (x, y) 表示先生與妻子的血型分別為 x 與 y ，則

$$P = \{(A, A), (B, B), (O, O), (AB, AB)\},$$

$$Q = \{(O, A), (O, B), (O, O), (O, AB), (A, O), (B, O), (AB, O)\}.$$

(1) P 和 Q 都發生的事件 $P \cap Q = \{(O, O)\}$.

(2) P 或 Q 發生的事件

$$P \cup Q = \{(O, A), (O, B), (O, \emptyset), (O, AB), (A, O), (B, O), (AB, O), (B, B), (A, B)\} .$$

【類題 5】

人的血型有 A, B, AB 與 O 四種，今有夫妻二人，若 P 表示兩人血型一樣的事件，Q 表示兩人至少有一人爲 O 型的事件。若 R 表示兩人的血型至少有一人爲 A 型的事件。求

(1) Q 和 R 都發生的事件。

(2) P 和 R 都不發生的事件。

【詳解】

(1) Q 和 R 都發生的事件爲兩人中有一人爲 O 型且另一人爲 A 型，故

$$Q \cap R = \{(A, O), (O, A)\} .$$

(2) P 和 R 都不發生的事件爲兩人血型不同且都不爲 A 型，故

$$P' \cap R' = \{(B, O), (B, AB), (O, B), (O, AB), (AB, B), (AB, O)\} .$$

【例題 6】

已知一試驗的樣本空間爲 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，試問：

(1) 樣本空間 S 中的事件共有多少個？

(2) 恰含 3 個樣本點的事件共有多少個？

(3) 若事件 $A = \{1, 2\}$ ，與事件 A 互斥的事件共有多少個？

Ans : (1) 32 , (2) 10 , (3) 8

【詳解】

(1) 因爲樣本空間 S 共有 5 個元素，每個元素有選和不選兩種情形，所以共有 $2^5 = 32$ (個) .

(2) 因爲樣本空間 S 共有 5 個元素，

所以恰含 3 個樣本點的事件共有 $C_3^5 = 10$ (個) .

(3) 若事件 B 爲與事件 A 互斥的事件，

表示事件 B 不含 1, 2 兩個樣本點。
因此, 1, 2 只有不選 1 種情形,
而 3, 4, 5 有選和不選兩種情形。
故與事件 A 互斥的事件共有
 $1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$ (個)。

【類題 6】

已知一試驗的樣本空間 S 的樣本點個數 $n(S) = 7$, 試問:

- (1) 樣本空間 S 中的事件共有多少個?
- (2) 恰含 3 個樣本點的事件共有多少個?
- (3) 若事件 A 樣本點個數 $n(A) = 4$, 與事件 A 互斥的事件共有多少個?

Ans : (1) 128, (2) 35, (3) 8

【詳解】

- (1) 因為樣本空間 S 共有 7 個元素,
每個元素有選和不選兩種情形,
所以共有 $2^7 = 128$ (個)。
- (2) 恰含 3 個樣本點的事件共有 $C_3^7 = 35$ (個)。
- (3) $n(A) = 4$, 與事件 A 互斥的事件共 $2^{7-4} = 8$ (個)。

主題二、事件與集合

1. 必然事件（全事件）： S .
2. 不可能事件（空事件）： \emptyset .
3. 基本事件：只含一個樣本的事件 .
4. 餘事件：事件 A 不發生的事件，稱為事件 A 的餘事件，以 A' 表示 .
5. 和事件：兩個事件 A 、 B 中至少有一事件發生的事件，即 $A \cup B$.
6. 積事件：兩個事件 A 、 B 同時發生的事件，即 $A \cap B$.

【例題 7】

投擲一枚銅板三次，並觀察其出現正面或反面，設至少有一個出現正面的事件為 A ，出現三次相同面的事件為 B ，試寫出：

- (1) A 與 B 的和事件。
- (2) A 與 B 的積事件。

【詳解】

$$A = \{(+, -, -), (-, +, -), (-, -, +), (+, +, -), (+, -, +), (-, +, +), (+, +, +)\},$$

$$B = \{(+, +, +), (-, -, -)\}.$$

- (1) A 與 B 的和事件為

$$A \cup B = \{(-, -, -), (+, -, -), (-, +, -), (-, -, +), (+, +, -), (+, -, +), (-, +, +), (+, +, +)\}.$$

- (2) A 與 B 的積事件為 $A \cap B = \{(+, +, +)\}.$

【類題 7】

擲一粒骰子，其出現點數之樣本空間為 S ， A 表出現質數點的事件， B 表出現偶數點的事件，試寫出：

- (1) A 與 B 之和事件。
- (2) A 與 B 之積事件。
- (3) A 的餘事件。

【詳解】

$$\text{因為 } S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$A = \{2, 3, 5\}, \quad B = \{2, 4, 6\}, \quad \text{則}$$

- (1) A 與 B 之和事件 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}.$
- (2) A 與 B 之積事件 $A \cap B = \{2\}.$
- (3) A 的餘事件 $A' = S - A = \{1, 4, 6\}.$

It99ok231 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 投擲一均勻骰子，寫出下列各集合。

- (1) 所出現點數的樣本空間 S 。
- (2) 事件 A 表出現點數為偶數的事件。
- (3) 事件 B 表出現點數大於 3 的事件。
- (4) 事件 C 表出現點數為 7 的事件。

【詳解】

$$(1) S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$(2) A = \{2, 4, 6\}$$

$$(3) B = \{4, 5, 6\}$$

$$(4) C = \emptyset。$$

2. 樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4\}$

- (1) S 的所有事件共有幾個？
- (2) S 中恰含有兩個樣本點的事件有幾個？

Ans : (1) 16 個，(2) 6 個

【詳解】

(1) S 的所有事件共有 $2^4 = 16$ 個。

(2) S 中恰含有兩個樣本點的事件有 $C_2^4 = 6$ 個。

3. 連續丟一個硬幣 4 次，觀察依次出現正面或反面的情形，出現正面記 1 點，出現反面記 0 點。若 A 表 4 次點數的乘積為 1 的事件， B 表 4 次點數的和為 1 的事件， C 表 4 次點數至多一次為 0 的事件， D 表前 2 次點數都為 1 的事件，則下列選項哪些正確？

- (1) A 與 B 為互斥事件
- (2) B 與 D 為互斥事件
- (3) A 與 C 都發生的事件為 A
- (4) A 或 C 發生的事件為 C
- (5) C 與 D 都發生的事件為 A 。

Ans : (1)(2)(3)(4)

【詳解】

$$S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}。$$

$$A = \{(1, 1, 1, 1)\},$$

$$B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\},$$

$$C = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$$

$$D = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0)\}。$$

(1) $A \cap B = \emptyset$ ，故 A 與 B 為互斥事件。

(2) $B \cap D = \emptyset$ ，故 B 與 D 為互斥事件。

(3) $A \cap C = A$ ，即 A 與 C 都發生的事件為 A。

(4) $A \cup C = C$ ，即 A 或 C 發生的事件為 C。

(5) $C \cap D = \{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)\} \neq A$ 。

4. 袋子中裝有編號 1 到 10 號的卡片十張，分別依下列方法從袋中取卡片並觀察號碼，求以下各試驗的樣本空間各有幾個樣本點？

(1) 取出一張。

(2) 同時取出二張。

(3) 取三次，每次一張，取出後不放回。

(4) 取三次，每次一張，取出後放回。

Ans : (1) 10，(2) 45，(3) 720，(4) 1000

【詳解】

$$(1) C_1^{10} = 10。$$

$$(2) C_2^{10} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45。$$

$$(3) P_3^{10} = 10 \times 9 \times 8 = 720。$$

$$(4) 10^3 = 1000。$$

5. 擲一個骰子 3 次，觀察每次出現的點數，求：

(1) 3 次都沒有出現點數 1 的事件的元素個數。

(2) 3 次中至少出現一次點數 1 的事件的元素個數。

Ans : (1) 125，(2) 91

【詳解】

- (1) $5^3 = 125$ 。
 (2) $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$ 。

6. 擲一枚硬幣三次，分別記錄每次出現正反面情形的樣本空間為 S ， A 表第一次出現正面的事件， B 表第二次出現正面的事件， C 表第三次出現反面的事件。試分別表出：

- (1) A 與 B 之和事件
 (2) A 與 B 之積事件
 (3) A 不發生且 B 不發生的事件
 (4) A, B, C 之和事件
 (5) A, B, C 之積事件。

【詳解】

以 1 代表出現正面，0 代表出現反面，則

$$S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\},$$

$$A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)\},$$

$$B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\},$$

$$C = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\},$$

- (1) A 與 B 之和事件 $A \cup B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$ 。
 (2) A 與 B 之積事件 $A \cap B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$ 。
 (3) A 不發生且 B 不發生的事件 $A' \cap B' = \{(0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$ ，
 (4) A, B, C 之和事件 $A \cup B \cup C = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 。
 (5) A, B, C 之積事件 $A \cap B \cap C = \{(1, 1, 1)\}$ 。

進階題 

7. 從一副撲克牌（52 張）中任取三張，
 (1) 設 A 表所取三張為同一花色的事件，則事件 A 共有幾個元素？
 (2) 設 B 表所取三張為同一點數的事件，則事件 B 共有幾個元素？

Ans : (1) 1144 個，(2) 52 個

【詳解】

$$(1) n(A) = 4 \times C_3^{13} = 4 \times \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2} = 1144。$$

$$(2) n(B) = 13 \times C_3^4 = 52。$$

8. 同時丟一枚硬幣及一粒骰子，觀察硬幣的正反面及骰子的點數之出現情形，設樣本空間為 S ， A 表示硬幣出現正面的事件， B 表示骰子出現奇數點的事件， C 表示骰子出現質數點的事件，則下列哪些選項正確？

$$(1) n(S)=12, (2) n(A)=6, (3) n(B)=6, (4) n(C)=6, (5) n(A \cup B)=n(A \cup C)。$$

Ans : (1)(2)(3)(4)(5)

【詳解】

$$(1) S = \{(\text{正}, 1), (\text{正}, 2), (\text{正}, 3), (\text{正}, 4), (\text{正}, 5), (\text{正}, 6), \\ (\text{反}, 1), (\text{反}, 2), (\text{反}, 3), (\text{反}, 4), (\text{反}, 5), (\text{反}, 6)\},$$

$$n(S) = 12。$$

$$(2) A = \{(\text{正}, 1), (\text{正}, 2), (\text{正}, 3), (\text{正}, 4), (\text{正}, 5), (\text{正}, 6)\},$$

$$n(A) = 6。$$

$$(3) B = \{(\text{正}, 1), (\text{正}, 3), (\text{正}, 5), (\text{反}, 1), (\text{反}, 3), (\text{反}, 5)\},$$

$$n(B) = 6。$$

$$(4) C = \{(\text{正}, 2), (\text{正}, 3), (\text{正}, 5), (\text{反}, 2), (\text{反}, 3), (\text{反}, 5)\},$$

$$n(C) = 6。$$

$$(5) A \cup B = \{(\text{正}, 1), (\text{正}, 2), (\text{正}, 3), (\text{正}, 4), (\text{正}, 5), (\text{正}, 6), \\ (\text{反}, 1), (\text{反}, 3), (\text{反}, 5)\}, n(A \cup B) = 9,$$

$$A \cup C = \{(\text{正}, 1), (\text{正}, 2), (\text{正}, 3), (\text{正}, 4), (\text{正}, 5), (\text{正}, 6), \\ (\text{反}, 2), (\text{反}, 3), (\text{反}, 5)\}, n(A \cup C) = 9,$$

$$\text{故 } n(A \cup B) = n(A \cup C)。$$

9. 設 S 表一試驗的樣本空間， $n(S) = 10$ ， A 為一事件，且 $n(A) = 4$ ，

則與 A 互斥的事件共有幾個？

Ans : 64 個

【詳解】

$$n(A) = 4, \text{ 得 } n(A') = 6。$$

從 A' 的 6 個元素中任意取出的元素所構成的事件皆與 A 互斥，故共有 $2^6 = 64$ 個是事件。