

數學基礎講義

圓與直線關係

信望愛文教基金會 · 數學種子教師團隊



圓與直線關係

圓的方程式

平面上定義圓為給定一點 O 以及固定長度 r ，在座標平面上所有與 O 點距離為 r 之點集合稱之為圓，其中這個 O 就是我們所熟悉的圓心， r 即為半徑。

關於圓的方程式我們存在以下幾種表示方法：

圓的標準式：

座標平面上給定圓心 (a,b) ，以及半徑長 r 。

則圓 C 之方程式為

$$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

圓的一般式：

將圓的標準式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 展開化簡成二元二次方程式的形式，

$$x^2+y^2+dx+ey+f=0$$

此方程式即稱為圓的一般式

圓的直徑式：

座標平面上給定一圓的直徑兩端點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ，

則圓 C 的方程式為：

$$C:(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

點與圓關係

假設已知一圓 $C: (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ，以及點 $P(a,b)$ 則 P 點與圓之關係可分成下列幾種方法

點在圓外

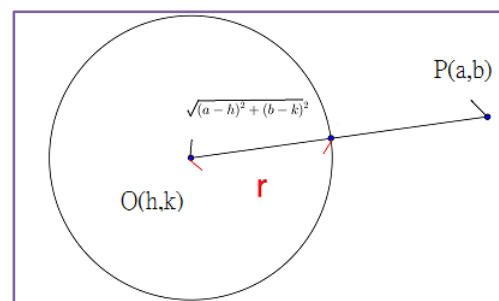
(I) 判別方式：點到圓心距離 $>$ 半徑

$$\sqrt{(a-h)^2+(b-k)^2} > r$$

(II) 將圓化為一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 之後

將 $P(a,b)$ 之座標代入左式，

若代入之結果 $a^2+b^2+dx+ey > 0$ ，則 P 點在圓外



點在圓上

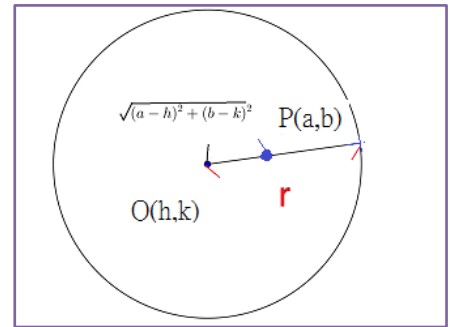
(I) 判別方式：點到圓心距離 = 半徑

$$\sqrt{(a-h)^2 + (b-k)^2} = r$$

(II) 將圓化為一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 之後

將 $P(a,b)$ 之座標代入左式，

若代入之結果 $a^2+b^2+dx+ey+f=0$ ，則 P 點在圓上。



點在圓內

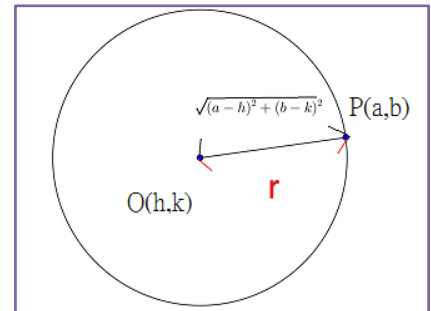
(I) 判別方式：點到圓心距離

$$\sqrt{(a-h)^2 + (b-k)^2} < r$$

(II) 將圓化為一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 之後

將 $P(a,b)$ 之座標代入左式，

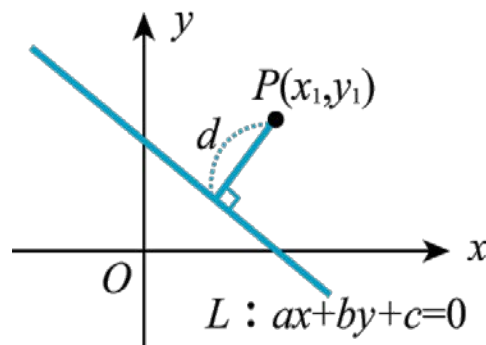
若代入之結果 $a^2+b^2+dx+ey+f < 0$ ，則 P 點在圓內



點與直線距離

已知座標平面上一直線 $L:ax+by+c=0$ 以及點 $P(x_1,y_1)$ 則 P 到 L 的距離

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



圓與直線關係

平面上圓與直線之間可能存在三種關係：

1. 圓與直線不相交（相離）
2. 圓與直線交於1點（相切）
3. 圓與直線交於兩點（相割）

要判斷圓與直線關係有兩種方法，第一種是藉助點與直線距離公式計算圓心到直線的距離，再將此長度與半徑做比較。第二種為代數判斷法，尋找在圓方程式以及直線方程式之間是否存在聯立解，接下來將一一詳述之。

I. 設圓 C 與直線 L 的方程式

$$\begin{cases} C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ L: ax + by + c = 0 \end{cases}$$

圓心 (h,k) 到直線 L 的距離為 $d = \frac{|ah+bk+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$d > r$ 圓與直線不相交（相離）

$d = r$ 圓與直線交於1點（相切）

$d < r$ 圓與直線交於兩點（相割）

II. 代數判定法

設圓 C 與直線 L 的方程式如下，並解其聯立方程式

$$\begin{cases} C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ L: ax + by + c = 0 \end{cases}$$

利用 $ax+by+c=0$ 將其中一個變數消去

移項後得到 $y = \frac{-ax-c}{b}$ 將這個 y 代入圓方程式（將 x 代換掉也可以得到一樣的效果）

得到 $(x-h)^2 + \left(\frac{-ax-c}{b} - k\right)^2 = r^2$

最後將方程式移項化簡成 $Ax^2 + Bx + c = 0$

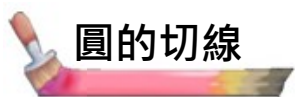
令其判別式為 Δ

$\Delta < 0$ 則圓與直線不相交（相離）

$\Delta = 0$ 則圓與直線交於1點（相切）

$\Delta > 0$ 則圓與直線交於兩點（相割）

從代數上的意義來看這種判定法的中心思想就是，如果 $\Delta > 0$ 代表存在兩組相異的點座標 (x,y) 可以同時滿足兩個式子，即代表圓跟直線會交於兩點； $\Delta = 0$ 的話就是只有一個 (x,y) 可以滿足，代表只有一個交點也就是切點； $\Delta < 0$ 代表這個方程式無解，也就是說在座標平面上找不到點可以同時位於這兩個圖形上，也就代表圓與直線會相離。



圓的切線

切線的定義：與圓恰有一個交點的直線稱為切線，該交點稱為切點。

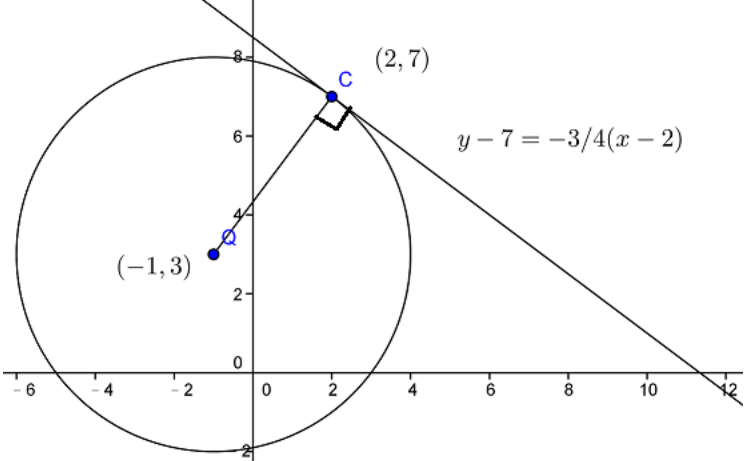
切線有一個很重要的性質是切線必垂直於經過該切點的半徑，在求切線的過程中江蕙會大量利用到這項性質來幫助我們計算。

平面座標上切線的求法依照已知的條件不同，做法主要可以分成以下三種：

1. 給定通過的切點，求切線。
2. 給定切線斜率，求切線。
3. 給定圓外一點，求切線。

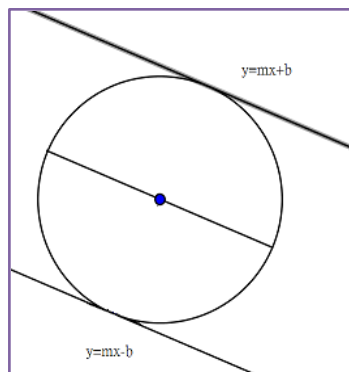
1. 給定通過切點算切線

假設圓心為 Q 點、切點為 P 點，利用 $\overline{QP}$ 必垂直切線的性質推出切線斜率。最後利用點斜式結合已知 P 點座標跟切線斜率得到切線方程式

例題	已知圓方程式 $C: (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$ ，求過切點 $(2,7)$ 的切線方程式
ANS	利用點$(2,7)$以及圓心$(-1,3)$求出過切點的半徑方程式斜率為$\frac{4}{3}$ 切線需與$\overline{QP}$垂直故切線斜率必為$-\frac{3}{4}$，接下來利用點斜式解過點$(2,7)$斜率$-\frac{3}{4}$的直線方程式為 $y - 7 = -\frac{3}{4}(x - 2)$ 

2. 給定切線斜率，求切線

座標平面上給定圓 C 以及斜率 m ，可以求得兩條切線方程式，且這兩條切線將對稱於斜率同樣為 m 的直徑。



假設已知圓 $C: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ 並給定斜率 m ，則切圓 C 且斜率為 m 之切線方程式為：

$$y - k = m(x - h) \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

如果是不喜歡記公式的同學，這裡提供另外一個相當直覺的算法。

給定斜率 m 就可以假設切線方程式為 $y = mx + b$ ，接下來利用圓心到切線距離需等於半徑列出關係式 $\frac{|mh - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = r$ ，在這個等式裡除了 b 以外全部都是已知常數，故可輕鬆求得兩切線方程式。我們用一個簡單例子來示範這個作法。

例題	圓C： $x^2+y^2=1$ 求與圓C相切，且斜率 $=\frac{-3}{4}$ 的切線
ANS	設切線方程式為 $y=\frac{-3}{4}x+b$ ，則圓心(0,0)到切線的距離為 $\frac{ 0-0+b }{\sqrt{(\frac{-3}{4})^2+1}}=1$ $b=\pm\frac{5}{4}$ ，所以與圓C相切，且斜率 $=\frac{-3}{4}$ 的切線將會有兩條分別為 $y=\frac{-3}{4}x+\frac{5}{4}$ 以及 $y=\frac{-3}{4}x-\frac{5}{4}$

3.給定圓外一點，求切線

圓外任意一點對圓必可做出兩條切線，給定圓外一點 $P(x_0, y_0)$ 則可假設過此點的方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$ 。接下來我們有兩種方法可以求出 m ，第一種利用圓心到直線距離等於半徑；第二種利用圓與直線關係中的判別式 $\Delta=0$ ，兩種作法完全等價。**值得注意的一點是**，已知過圓外一點必可做出兩條切線，但若是最後只算出一個 m ，千萬不要以為就是只有一條切線，而是另外一條是斜率無法表達的垂直切線，過 (x_0, y_0) 的垂直切線方程式即為 $x=x_0$ 。

例題	圓C： $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 點P(9,9) 求過P點與C相切之切線方程式
ANS	首先必須先確定P點與圓之相對位置 P代入C $\rightarrow(9-4)^2+(9+1)^2=125>25$ ，確定P在圓C，將會有兩條切線 圓心(4,-1) $r=5$ 過P點之方程式 $y-9=m(x-9)$ $mx-y+9-9m=0$ $d=\frac{ 4m+1+9-9m }{\sqrt{m^2+1}}=5$ $\rightarrow 10-5m ^2=25m^2+25$ $\rightarrow 100m=75$ $m=\frac{3}{4}$ ，只求出一個 m 代表另一個斜率為無法表達的垂直切線的斜率 故切線方程式為 $y-9=\frac{3}{4}(x-9)$ 以及 $x=9$

小試身手

例題1	設方程式 $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2-2=0$ 之圖形為一圓，試求 m 之範圍，以及當 $m=?$ 時此圓之半徑有最大值=？
例題2	已知一圓之圓心位於直線 $x+y-1=0$ 上，圓之半徑 $r=5$ ，且過點(6,0)，試求此圓之方程式
例題3	座標平面上一點 $A(6,3)$ ，點 P 為圓 $C: x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 上之一動點，試求 $\overline{PA}$ 之最大、最小值，以及此時 P 點之座標
例題4	坐標平面上圓 $C: (x-7)^2+(y-8)^2=9$ 圖形上有幾個點與圓點的距離正好為一整數
例題5	試求坐標平面上過點(1,2)且與圓 $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ 相切之切線方程式為何
例題6	求斜率為 2 且與圓 $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ 相切的直線方程式為何

解答與解析

例題1：將方程式配方後可得 $(x+(m+1))^2+(y-m)^2=-m^2+2m+3$

$\because$ 圖形為一圓

$$\therefore -m^2+2m+3>0$$

$$\Rightarrow -1<m<3$$

$$\text{圓之半徑為 } \sqrt{-m^2+2m+3} = \sqrt{-(m-1)^2+4}$$

當 $m=1$ 時圓之半徑 r 有最大值 $=2$

例題2：利用直線參數式設圓心坐標為 $(t, 1-t)$ ，以及已知過點(6,0)半徑為5

$$\Rightarrow \sqrt{(t-6)^2+(1-t)^2}=5$$

$$\Rightarrow (t-6)^2+(1-t)^2=25$$

$$\Rightarrow t^2-7t+6=0$$

$$t=6 \text{ 或 } 1$$

圓心為(6,-5) (1,0)

故圓之方程式為 $(x-6)^2+(y+5)^2=25$ 或 $(x-1)^2+y^2=25$

例題3 : $6^2+3^2-4 \times 6 + 2 \times 3 + 3 = 30 > 0$

$\Rightarrow A(6,3)$ 在圓 C 之外部

$$x^2+y^2-4x+2y+3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 = 2$$

故圓心為 $O(2,-1)$ 半徑為 $\sqrt{2}$

$$\overline{OA} = 4\sqrt{2} \Rightarrow \overline{PA} \text{之最小值} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}, \text{此時 } \overline{OP} : \overline{PA} = 1:3$$

$$\text{由分點公式可知 } P \text{ 點坐標為 } \left(\frac{3 \times 2 + 1 \times 6}{1+3}, \frac{3 \times (-1) + 1 \times 3}{1+3} \right) = (3,0)$$

$$\overline{PA} \text{ 之最大值} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$O(2,-1) \text{ 為 } (x,y) \text{ 及 } (3,0) \text{ 之中點, } \Rightarrow (x,y) = (1,-2)$$

例題4 : 圓 $C: (x-7)^2+(y-8)^2 = 9 \Rightarrow$ 圓心 $(7,8)$ 半徑 $= 3$

設圓上 P 點滿足到原點之距離為整數

$$\because \overline{OS} \leq \overline{OP} \leq \overline{OR}$$

$$\Rightarrow \overline{OA} - r \leq \overline{OP} \leq \overline{OA} + r$$

$$\Rightarrow \sqrt{7^2 + 8^2} - 3 \leq \overline{OP} \leq \sqrt{7^2 + 8^2} + 3$$

$$\Rightarrow 7 \dots \leq \overline{OP} \leq 13 \dots$$

$\overline{OP} = 8, 9, 10, 11, 12, 13$, 其中每個滿足距離為 $8, 9, 10, 11, 12, 13$ 的點在左右半圓都各有一個點, 故總共有 $2 \times 6 = 12$ 個

例題5 : 點 $(1,2)$ 在圓外

$$\text{設切線為 } y-2 = m(x-1)$$

$$\Rightarrow mx - y - m + 2 = 0$$

$$\text{又圓 } x^2+y^2-8x-6y+20=0 \Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2 = 5$$

$$\text{圓心 } (4,3) \text{ 半徑 } \sqrt{5}$$

$$\because \text{圓心到切線距離} = \text{半徑}$$

$$\therefore \frac{|4m-3-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow |3m-1| = \sqrt{5m^2+5}$$

$$\text{左右平方化簡後可得 } 2m^2-3m-2=0 \Rightarrow (m-2)(2m+1)=0$$

$$m = 2 \text{ 或 } \frac{-1}{2}$$

$$\text{故切線方程式為 } 2x-y=0 \text{ 與 } x+2y-5=0$$

例題6 : 設切線方程式為 $y=2x+k$

$$\text{圓 } x^2+y^2-4x+6y-3=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2 = 16$$

$$\text{圓心 } (2,-3) \text{ 半徑 } 4$$

$$\text{圓心至切線距離等於半徑} \Rightarrow \frac{|2 \times 2 - (-3) + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\frac{|7+k|}{\sqrt{5}} = 4$$

$$7+k = \pm 4\sqrt{5}$$

$$k = -7 \pm 4\sqrt{5}$$

$$\text{故切線方程式為 } 2x-y-7 \pm 4\sqrt{5}=0$$