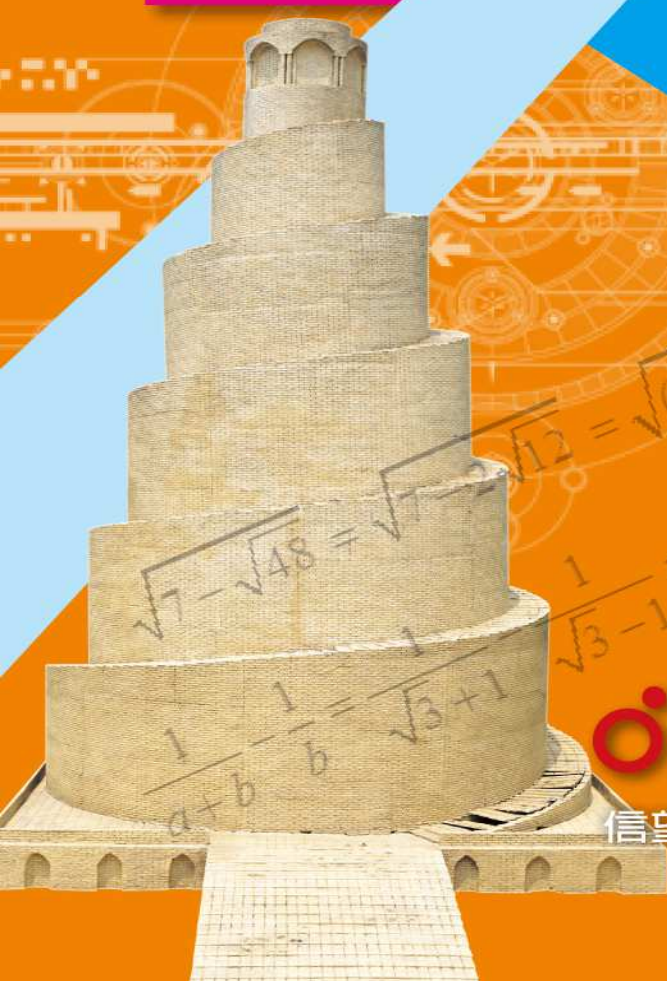


高中數學

進階
講義

廣義角

陳清海 老師

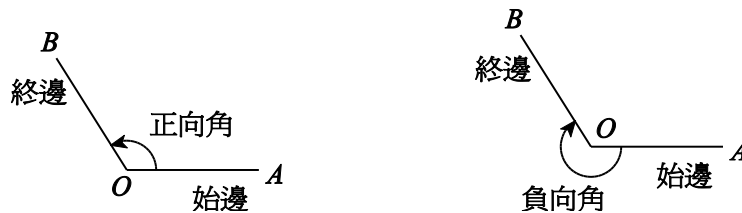


信望愛文教基金會

ok312 廣義角與極座標

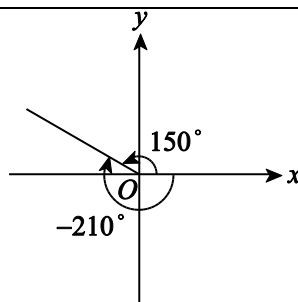
主題一、廣義角

- 廣義角：平面上，將射線 OA 繞著 O 點旋轉到射線 OB 所成的角，其中射線 OA 稱為角的始邊，射線 OB 稱為終邊，並規定：逆時針方向旋轉出的角為正向角，順時針方向旋轉出的角為負向角。



- 當兩個角的始邊和終邊完全相同的時候，我們稱這樣的角為同界角。
- 當有向角 θ 與 ϕ 是同界角 $\Leftrightarrow$ 會有一整數 n ，使得 $\theta = \phi + 360^\circ \times n$ (n 是整數)。
- 標準位置角：將廣義角放在坐標平面上，使角的頂點與原點重合，角的始邊在 x 軸正向上，這樣的角稱為標準位置角。當角的終邊落在第一、二、三或四象限時，我們分別稱這個角為第一、二、三或四象限角。當角的終邊落在 x 軸或 y 軸上時，我們稱它為象限角。

 **例** 150° 與 -210° 互為同界角，也都是第二象限角。



【例題 1】

下列何者是 123° 的同界角？

(1) 483° . (2) -123° . (3) 57° . (4) -237° .

Ans : (1)(4)

【詳解】

因為

$$483^\circ = 123^\circ + 360^\circ ,$$

$$-237^\circ = 123^\circ - 360^\circ ,$$

所以答案為(1)(4) .

【類題 1】

下列何者是 255° 的同界角？

(1) 615° . (2) 975° . (3) 75° . (4) -105° . (5) -465° .

Ans : (1)(2)(4)(5)

【詳解】

因為

$$615^\circ = 255^\circ + 360^\circ ,$$

$$975^\circ = 255^\circ + 360^\circ \times 2 ,$$

$$-105^\circ = 255^\circ - 360^\circ ,$$

$$-465^\circ = 255^\circ - 360^\circ \times 2 ,$$

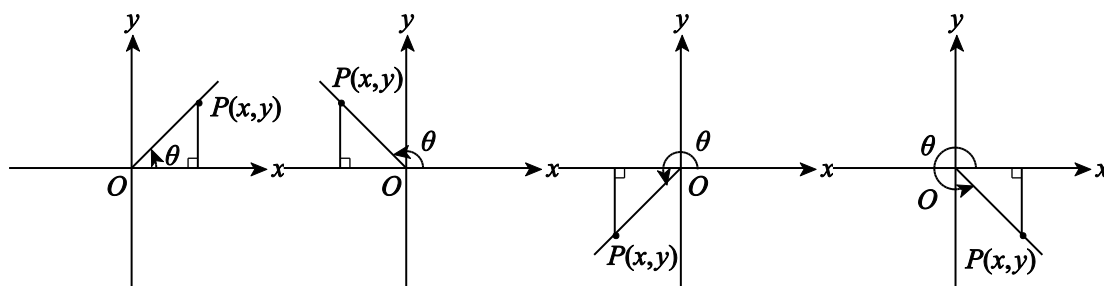
答案為(1)(2)(4)(5) .

主題二、廣義角的三角函數值

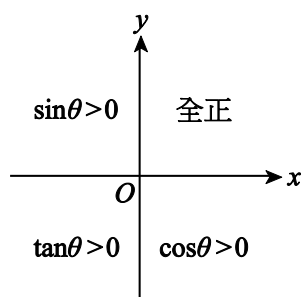
1. 設 θ 是一個標準位置角，在 θ 的終邊上任意取一點 $P(x, y)$ (P 不是原點)，

令 $\overline{OP} = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. 規定 θ 角的三角函數值為：

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$



2. 各象限中三角函數值的正負符號整理如下：



θ	(x, y)	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
第一象限	$(+, +)$	+	+	+
第二象限	$(-, +)$	+	-	-
第三象限	$(-, -)$	-	-	+
第四象限	$(+, -)$	-	+	-

3. 值域：

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos \theta \leq 1, \quad \tan \theta \in \mathbb{R}.$$

【例題 2】

已知 $P(3, -4)$ 為標準位置角 θ 終邊上的一點，
求 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 和 $\tan \theta$ 的值。

$$\text{Ans: } \sin \theta = \frac{-4}{5}, \quad \cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \tan \theta = \frac{-4}{3}$$

【詳解】

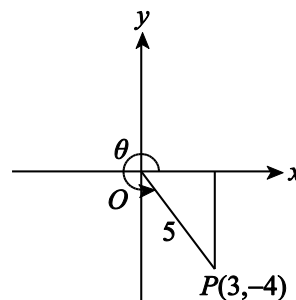
因為 $x = 3$ ， $y = -4$ ，

所以 $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ ，得

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3}.$$

**【類題 2】**

設 $P(-5, y)$ 為 θ 之終邊的一點，又 $\tan \theta = 2$ ，試求 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 的值。

$$\text{Ans: } \sin \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

【詳解】

$$\tan \theta = \frac{y}{-5} = 2 \Rightarrow y = -10,$$

故 $P(-5, -10)$ ， $\overline{OP} = 5\sqrt{5}$ ，

$$\sin \theta = \frac{-10}{5\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \theta = \frac{-5}{5\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【例題 3】

求 150° 和 -210° 的 $\sin$ ， $\cos$ 和 $\tan$ 值。

Ans：見詳解

【詳解】

在 150° 角的終邊上取一點 P ，
 設 P 在 x 軸的垂足為 Q ，
 則 $\angle POQ = 30^\circ$ 。若設 $\overline{OP} = 2$ ，
 則 $\overline{OQ} = \sqrt{3}$ ， $\overline{PQ} = 1$ ，
 故點 P 的坐標為 $(-\sqrt{3}, 1)$ 。得

$$\sin 150^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

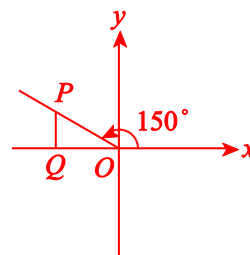
$$\tan 150^\circ = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因為 -210° 為 150° 的同界角 ($-210^\circ + 360^\circ = 150^\circ$)，
 與 150° 有相同的終邊，所以

$$\sin(-210^\circ) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(-210^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan(-210^\circ) = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$



【類題 3】

求下列各值：

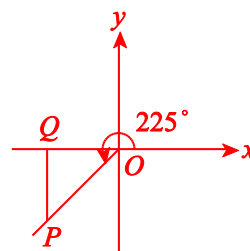
(1) $\sin 225^\circ$. (2) $\cos(-60^\circ)$.

Ans：(1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，(2) $\frac{1}{2}$

【詳解】

(1) 作圖， $\angle POQ = 45^\circ$ 。若設 $\overline{OP} = \sqrt{2}$ ，則

$\overline{OQ} = \overline{PQ} = 1$ ，故點 P 的坐標為 $(-1, -1)$ 。

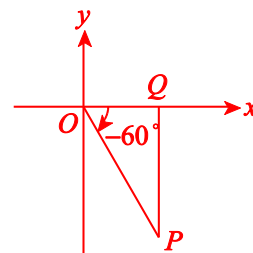


$$\text{得 } \sin 225^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

(2) 作圖, $\angle POQ = -60^\circ$. 若設 $\overline{OP} = 2$, 則

$\overline{OQ} = 1$, $\overline{PQ} = \sqrt{3}$, 故點 P 的坐標為 $(1, -\sqrt{3})$.

$$\text{得 } \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2} .$$



【例題 4】

求 $\sin 90^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\tan 90^\circ$ 的值.

Ans: 見詳解

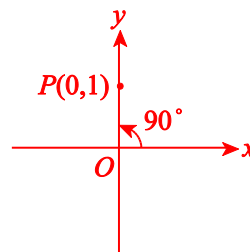
【詳解】

如圖, 當 $\theta = 90^\circ$, 可取 P 點坐標為 $(0, 1)$,

如此 $\overline{OP} = 1$, 即 $x = 0$, $y = 1$, $r = 1$. 得

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0,$$

因為 $\tan 90^\circ = \frac{y}{x}$ 的分母 x 是 0, 我們說 $\tan 90^\circ$ 沒有定義.



【類題 4】

求下列象限角的 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ 值:

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0°			
90°	1	0	$\times$
180°			
270°			

$\times$ 表示沒有定義

【詳解】

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0	1	0
90°	1	0	$\times$
180°	0	-1	0
270°	-1	0	$\times$

【例題 5】

根據下列各條件，分別指出各 θ 角是第幾象限角？

(1) $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$.

(2) $\tan\theta > 0$, $\sin\theta < 0$.

Ans : (1) 二 , (2) 三

【詳解】

(1) 由 $\sin\theta > 0$ 知 θ 為第一或第二象限角，又因為 $\cos\theta < 0$ ，所以 θ 為第二象限角。

(2) 由 $\tan\theta > 0$ 知 θ 為第一或第三象限角，又因為 $\sin\theta < 0$ ，所以 θ 為第三象限角。

【類題 5-1】

設 $\sin\theta < 0$, $\cos\theta > 0$, 試問 θ 是第幾象限角？

Ans : 四

【詳解】

由 $\sin\theta < 0$ 知 θ 為第三或第四象限角，
又因為 $\cos\theta > 0$ ，所以 θ 為第四象限角。

【類題 5-2】

已知 $\cos\theta \cdot \tan\theta < 0$, 試判斷 θ 為第幾象限角？

Ans : 第三象限角或第四象限角

【詳解】

因為 $\cos\theta \cdot \tan\theta < 0$ ，

所以 $\begin{cases} \cos \theta > 0, \\ \tan \theta < 0. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos \theta < 0, \\ \tan \theta > 0. \end{cases}$

$\cos \theta$ 與 $\tan \theta$ 在第三象限一負一正，在第四象限一正一負。
故 θ 為第三象限角或第四象限角。

【例題 6】

已知 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ 且 θ 是第二象限角，求 $\cos \theta$ 和 $\tan \theta$ 的值。

Ans : $\cos \theta = -\frac{12}{13}$, $\tan \theta = -\frac{5}{12}$

【詳解】

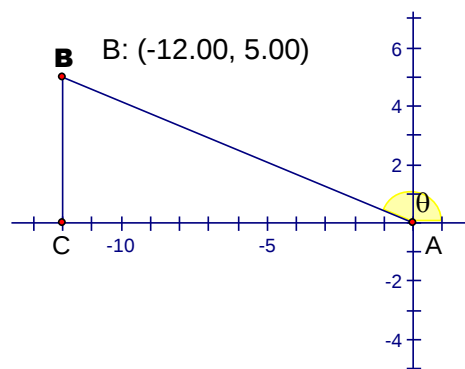
由 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 可得 $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$,

因為 θ 是第二象限角， $\cos \theta < 0$ ，所以

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13} ,$$

再由商數關係式得

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} .$$



【類題 6】

已知 $\cos \theta = -\frac{1}{4}$ ，且 θ 是第三象限角，求 $\sin \theta$ 與 $\tan \theta$ 之值。

Ans : $\sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\tan \theta = \sqrt{15}$

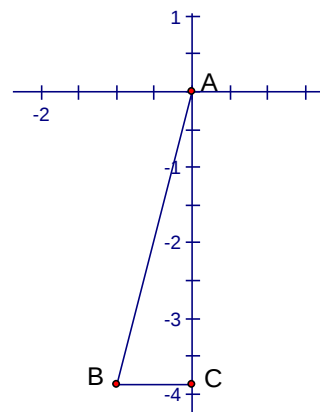
【詳解】

由 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 可得 $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$,

因為 θ 是第三象限角， $\sin \theta < 0$ ，所以

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{4} ,$$

再由商數關係式得



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \sqrt{15} \quad .$$

主題三、換算公式

1. $(180^\circ - \theta)$ 關係式：

$$\sin(180^\circ - \theta) = +\sin \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta .$$

2. $(180^\circ + \theta)$ 關係式：

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \quad \tan(180^\circ + \theta) = +\tan \theta .$$

3. $(-\theta)$ 關係式：

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = +\cos \theta, \quad \tan(-\theta) = -\tan \theta .$$

4. $(90^\circ - \theta)$ 與 $(90^\circ + \theta)$ 關係式：

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta .$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = +\cos \theta, \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta .$$

5. $(270^\circ + \theta)$ 與 $(270^\circ - \theta)$ 關係式：

$$\sin(270^\circ + \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(270^\circ + \theta) = \sin \theta .$$

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta .$$

【例題 7】

求下列各三角函數值：

(1) $\sin 120^\circ$. (2) $\cos 135^\circ$. (3) $\tan(-210^\circ)$.

Ans : (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, (3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

【詳解】

(1) 因為 $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$, 所以

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

(2) 因為 $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, 所以

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

(3) $\tan(-210^\circ) = -\tan 210^\circ = -\tan(180^\circ + 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} .$

【類題 7-1】

求下列各三角函數值：

(1) $\sin 150^\circ$. (2) $\cos 330^\circ$. (3) $\tan 240^\circ$.

Ans : (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (3) $\sqrt{3}$

【詳解】

(1) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} .$

(2) $\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} .$

(3) $\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} .$

【類題 7-2】

求 $\cos 150^\circ \sin 240^\circ + \cos 315^\circ \sin 225^\circ$ 的值 .

Ans : $\frac{1}{4}$

【詳解】

$$\begin{aligned}
& \cos 150^\circ \sin 240^\circ + \cos 315^\circ \sin 225^\circ \\
&= \cos(180^\circ - 30^\circ) \sin(180^\circ + 60^\circ) + \cos(-45^\circ) \sin(180^\circ + 45^\circ) \\
&= (-\cos 30^\circ)(-\sin 60^\circ) + \cos 45^\circ(-\sin 45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{4} .
\end{aligned}$$

【例題 8】

$$\text{化簡：} \frac{\sin(-\theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} + \frac{\sin(90^\circ + \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} + \frac{\sin(180^\circ - \theta)}{\cos(270^\circ - \theta)} .$$

Ans : 1

【詳解】

$$\text{原式} = \frac{-\sin \theta}{-\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{-\sin \theta} = 1 + 1 - 1 = 1 .$$

【類題 8】

$$\text{化簡：} \sin(90^\circ - \theta) \cos(180^\circ + \theta) + \cos(90^\circ + \theta) \sin(180^\circ - \theta) .$$

Ans : -1

【詳解】

$$\text{原式} = \cos \theta(-\cos \theta) + (-\sin \theta)(\sin \theta) = -(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -1 .$$

【例題 9】

設 $\cos(-110^\circ) = k$ ，試以 k 表示 $\tan 250^\circ$ 的值。

$$\text{Ans : } -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

【詳解】

$$\text{因為 } \cos(-110^\circ) = \cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ ,$$

$$\text{所以 } \cos 70^\circ = -k .$$

$$\text{因此, } \sin 70^\circ = \sqrt{1 - (-k)^2} = \sqrt{1 - k^2} .$$

$$\text{又因為 } \tan 250^\circ = \tan(180^\circ + 70^\circ) = \tan 70^\circ , \text{ 所以}$$

$$\tan 250^\circ = \tan 70^\circ = \frac{\sin 70^\circ}{\cos 70^\circ} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{-k} = -\frac{\sqrt{1-k^2}}{k} .$$

【類題 9】

設 $\sin 793^\circ = k$ ，試以 k 表示 $\cos(-107^\circ)$ 。

Ans : $-\sqrt{1-k^2}$

【詳解】

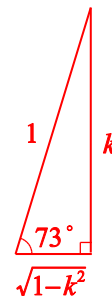
$$\sin 793^\circ = \sin(360^\circ \times 2 + 73^\circ) = \sin 73^\circ ,$$

$$\text{故 } \sin 73^\circ = k .$$

$$\text{因此, } \cos 73^\circ = \sqrt{1-k^2}$$

$$\cos(-107^\circ) = \cos 107^\circ$$

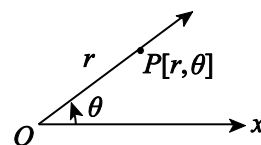
$$= \cos(180^\circ - 73^\circ) = -\cos 73^\circ = -\sqrt{1-k^2} .$$



主題四、直角坐標與極坐標的變換

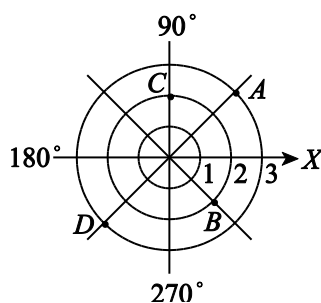
- 對於平面上異於 O 的任一點 P ，令 $r = \overline{OP}$ ；
 θ 為以 x 軸為始邊，射線 OP 為終邊的廣義角，
 我們可以用符號 $[r, \theta]$ 來表示點 P 的位置，
 這種坐標稱為極坐標，記作 $P[r, \theta]$ 。
- 若平面上一點 P 的直角坐標為 (x, y) ，極坐標為 $[r, \theta]$ ，則有

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



【例題 10】

寫出下圖中點 A, B, C, D 的極坐標。



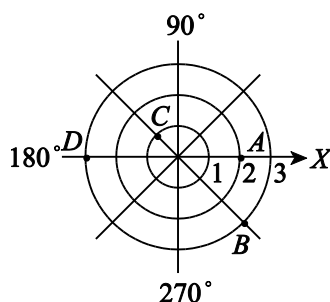
Ans : $A[3, 45^\circ]$, $B[2, -45^\circ]$, $C[2, 90^\circ]$, $D[3, 225^\circ]$

【詳解】

A 的極坐標為 $A[3, 45^\circ]$ (或 $[3, 405^\circ]$, $[3, -315^\circ]$, ...等),
 $B[2, -45^\circ]$, $C[2, 90^\circ]$, $D[3, 225^\circ]$ 。

【類題 10】

寫出下圖中點 A, B, C, D 的極坐標。



Ans : $A[2, 0^\circ]$, $B[3, -45^\circ]$, $C[1, 135^\circ]$, $D[3, 180^\circ]$

【詳解】

極坐標為 $A[2,0^\circ]$, $B[3,-45^\circ]$, $C[1,135^\circ]$, $D[3,180^\circ]$.

【例題 11】

(1) 已知點 P 的極坐標為 $[4, -60^\circ]$, 求其直角坐標 .

(2) 已知點 P 的直角坐標為 $(-2\sqrt{3}, 2)$, 求其極坐標 .

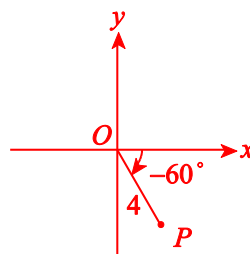
Ans : (1) $(2, -2\sqrt{3})$, (2) $[4, 150^\circ]$

【詳解】

(1) 因為 $r = 4$, $\theta = -60^\circ$, 所以直角坐標

$$(x, y) = (4\cos(-60^\circ), 4\sin(-60^\circ))$$

$$= \left(4\left(\frac{1}{2}\right), 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) = (2, -2\sqrt{3}) .$$

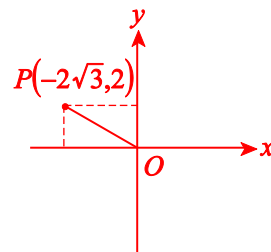


(2) 因為 $r = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{16} = 4$,

且 P 在第二象限,

$$\cos \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150^\circ ,$$

所以極坐標為 $[4, 150^\circ]$.



【類題 11】

(1) 已知點 P 的極坐標為 $[4\sqrt{2}, 135^\circ]$, 求其直角坐標 .

(2) 已知點 P 的直角坐標為 $(-3, -3\sqrt{3})$, 求其極坐標 .

Ans : (1) $(-4, 4)$, (2) $[6, 240^\circ]$

【詳解】

(1) 因為 $r = 4\sqrt{2}$, $\theta = 135^\circ$, 所以直角坐標

$$\begin{aligned}(x, y) &= (4\sqrt{2} \cos 135^\circ, 4\sqrt{2} \sin 135^\circ) \\ &= \left(4\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right), 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) = (-4, 4) .\end{aligned}$$

(2) 因為 $r = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = 6$,

且 P 在第三象限, $\cos \theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} = \cos 240^\circ$,

所以極坐標為 $[6, 240^\circ]$.

ok312ex

基礎題

1. 坐標平面上， O 為原點， θ 為第二象限角， $P(x,1)$ 是 θ 角終邊上的一點，已知 $\overline{OP} = 2$ ，求 $\cos \theta$ 之值。

Ans : $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

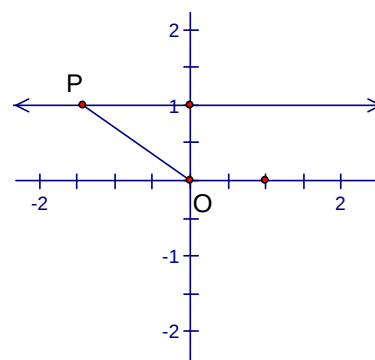
$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + 1} = 2$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3},$$

θ 為第二象限角，

$$\text{故取 } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



2. 設 θ 為第三象限角，則點 $(\sin \theta + \cos \theta, \tan \theta \sin \theta)$ 在第幾象限？

Ans : 第三象限

【詳解】

θ 為第三象限角，

$$\Rightarrow \sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0,$$

$$\Rightarrow \sin \theta + \cos \theta < 0, \tan \theta \cdot \sin \theta < 0,$$

$$\Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta, \tan \theta \sin \theta) \text{ 在第三象限.}$$

3. 求 $\frac{\cos 135^\circ}{\sin 225^\circ} + \frac{\tan(-300^\circ)}{\cos 210^\circ}$ 的值。

Ans : -1

【詳解】

$$\frac{\cos 135^\circ}{\sin 225^\circ} + \frac{\tan(-300^\circ)}{\cos 210^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
 &= 1 - 2 \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

4. 設 θ 為第四象限角，且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$ ，求下列各式的值：

(1) $\cos(\theta - 90^\circ)$.

(2) $\tan(540^\circ + \theta)$.

Ans : (1) $-\frac{4}{5}$, (2) $-\frac{4}{3}$

【詳解】

(1) $\cos(\theta - 90^\circ)$.

$$= \cos(90^\circ - \theta)$$

$$= \sin \theta$$

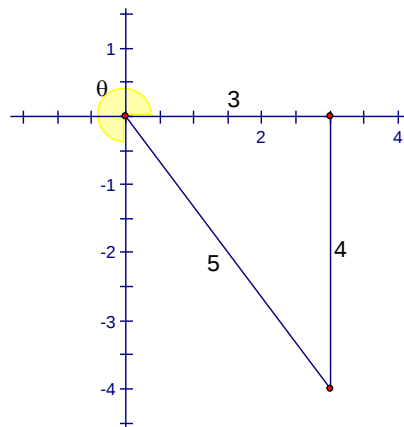
$$= -\frac{4}{5} .$$

(2) $\tan(540^\circ + \theta)$

$$= \tan(180^\circ + \theta)$$

$$= \tan \theta$$

$$= -\frac{4}{3} .$$



5. 若點 $(\cos \theta, \tan \theta)$ 在第三象限，則 θ 在第幾象限？

Ans : 第二象限

【詳解】

點 $(\cos \theta, \tan \theta)$ 在第三象限，

$$\Rightarrow \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$\Rightarrow (\theta \text{ 在二、三象限}) \text{ 且 } (\theta \text{ 在二、四象限})$

$\Rightarrow \theta \text{ 在第二象限} .$

6. 設 $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = -5$ ，且 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ，求 $\cos\theta$ 。

Ans : $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

【詳解】

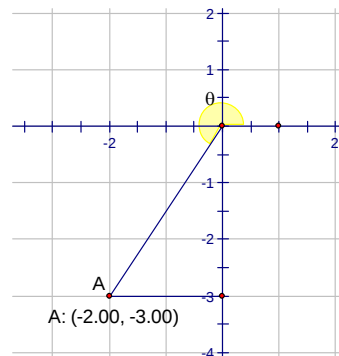
$$\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = -5$$

$$\Rightarrow 1+\tan\theta = -5+5\tan\theta$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{因 } 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

$$\text{故 } \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}}$$



進階題

7. 如右圖 $\angle BAC = \theta$ ， $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = a$ ， $\overline{BD} = b$ 。

下列選項何者可以表示 $\overline{CD}$ ？

- (1) $a\sin\theta + b\cos\theta$. (2) $a\sin\theta - b\cos\theta$. (3) $a\cos\theta - b\sin\theta$.
 (4) $a\cos\theta + b\sin\theta$. (5) $a\sin\theta + b\tan\theta$.

Ans : (2)

【詳解】

如右圖，

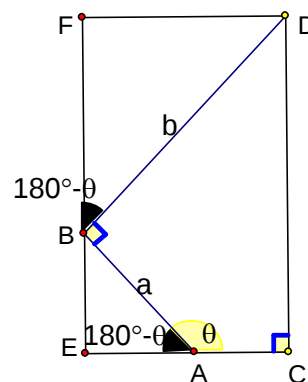
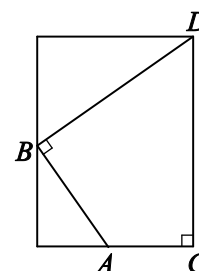
$\overline{CD}$

$$= \overline{EF}$$

$$= \overline{EB} + \overline{BF}$$

$$= a \cdot \sin(180^\circ - \theta) + b \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= a \cdot \sin\theta - b \cdot \cos\theta$$



8. 設 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ，求

$$\sqrt{\sin^2\theta} + \sqrt{(1+\sin\theta)^2} - \sqrt{\cos^2\theta} + \sqrt{(\cos\theta-1)^2} \text{ 之值。}$$

Ans : 2

【詳解】

$$180^\circ < \theta < 270^\circ ,$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt{(1 + \sin \theta)^2} - \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\cos \theta - 1)^2} \\ &= -\sin \theta + (1 + \sin \theta) - (-\cos \theta) + (1 - \cos \theta) \\ &= 2. \end{aligned}$$

9. 若 $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ，且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，求 $\cos \theta$ 。

Ans : $\frac{4}{5}$

【詳解】

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \sin \theta = 1 - 5 \cdot \cos \theta, \text{兩邊平方}$$

$$\Rightarrow 25(1 - \cos^2 \theta) = (1 - 5 \cos \theta)^2 = 1 - 10 \cos \theta + 25 \cos^2 \theta$$

$$\Rightarrow 50 \cos^2 \theta - 10 \cos \theta - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 25 \cos^2 \theta - 5 \cos \theta - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (5 \cos \theta + 3)(5 \cos \theta - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{4}{5} \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{3}{5} .$$

$$\text{因 } 270^\circ < \theta < 360^\circ, \text{ 故取 } \cos \theta = \frac{4}{5} .$$

10. 求 $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 180^\circ$ 的值。

Ans : -1

【詳解】

$$\text{利用 } \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta ,$$

$$\cos 179^\circ = -\cos 1^\circ, \cos 178^\circ = -\cos 2^\circ, \dots, \cos 91^\circ = -\cos 89^\circ ,$$

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \cdots + \cos 180^\circ$$

$$= \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cdots + \cos 90^\circ + \cdots + \cos 178^\circ + \cos 179^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ$$

$$= 0 - 1 = -1 .$$

11. 若 θ 之終邊落在第三象限，則 $\frac{\theta}{3}$ 之終邊可能落在哪裡？

(1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限 (5) x 軸上 .

Ans : (1)(3)(4)

【詳解】

θ 之終邊落在第三象限，

$$\Rightarrow 180^\circ + 360^\circ \cdot n < \theta < 270^\circ + 360^\circ \cdot n$$

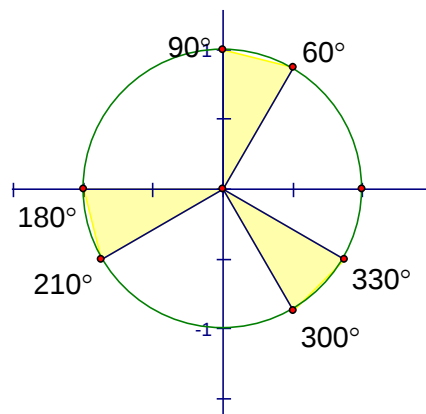
$$\Rightarrow 60^\circ + 120^\circ \cdot n < \frac{\theta}{3} < 90^\circ + 120^\circ \cdot n ,$$

$$n=3k+1 \Rightarrow 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 210^\circ ,$$

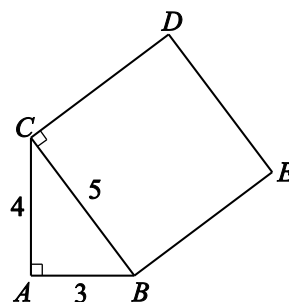
$$n=3k+2 \Rightarrow 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 330^\circ ,$$

$$n=3k+3 \Rightarrow 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 90^\circ .$$

故 $\frac{\theta}{3}$ 的終邊可能落在第三、四、一象限 .



12. 設直角三角形 ABC 之三邊長為 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\overline{CA}=4$, 以斜邊 $\overline{BC}$ 為一邊向外作出正方形 $BCDE$, 如右圖所示 .
令 $\angle ACD = \theta$, 試求 $\sin \theta + \cos \theta$ 之值 .



Ans : $\frac{1}{5}$

【詳解】

$$\sin \theta = \sin(90^\circ + \theta') = \cos \theta' = \frac{4}{5} ,$$

$$\cos \theta = \cos(90^\circ + \theta') = -\sin \theta' = -\frac{3}{5} ,$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5} .$$

13. 已知 O 為原點, A, B 兩點的極坐標為 $[3, 12^\circ], [5, 132^\circ]$, 求

(1) $\overline{AB}$ 的長.

(2) $\triangle OAB$ 的面積.

Ans: (1) 7, (2) $\frac{15}{4}\sqrt{3}$

【詳解】

將 A, B 各旋轉 -12° , 則

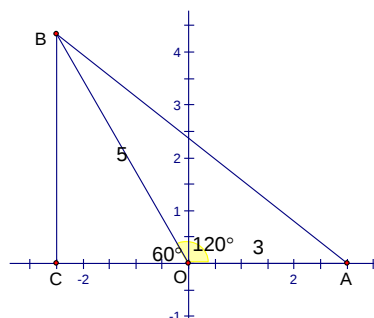
$$A[3, 0^\circ] = (3, 0),$$

$$B(5, 120^\circ) = (5\cos 120^\circ, 5\sin 120^\circ) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{AB} &= \sqrt{\left(3 + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{196}{4}} = \sqrt{49} = 7, \end{aligned}$$

(2) $\triangle OAB$ 的面積 ($\overline{BC}$ 為高)

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$



【另解】

$$A = [3, 12^\circ] = (3 \cdot \cos 12^\circ, 3 \cdot \sin 12^\circ),$$

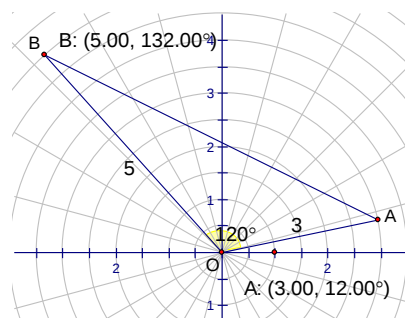
$$B = [5, 132^\circ] = (5 \cdot \cos 132^\circ, 5 \cdot \sin 132^\circ),$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \overline{AB}^2 &= (3\cos 12^\circ - 5\cos 132^\circ)^2 + (3\sin 12^\circ - 5\sin 132^\circ)^2 \\ &= 9\cos^2 12^\circ - 30\cos 12^\circ \cos 132^\circ + 25\cos^2 132^\circ \\ &\quad + 9\sin^2 12^\circ - 30\sin 12^\circ \sin 132^\circ + 25\sin^2 132^\circ \\ &= 9 + 25 - 30(\cos 12^\circ \cos 132^\circ + \sin 12^\circ \sin 132^\circ) \\ &= 34 - 30\cos 120^\circ \quad (\text{和角公式, 第四節才學到}) \\ &= 34 - 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \overline{AB} = 7.$$

(2) $\triangle OAB$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin 120^\circ \quad (\text{面積公式, 第三節才學到})$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} . \end{aligned}$$