

# 數學 1 進階講義

## 高次不等式

景美女中 · 莊嘉銘老師



信望愛文教基金會

## 2-4-3 高次不等式

### 定理敘述

高次不等式

設  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  為  $n$  次多項式 ( $n \geq 3$ )，則  $f(x) > 0$  ( $\geq 0, < 0, \leq 0$ ) 稱為高次不等式。

### 定理證明或說明

高次不等式解題技巧：

1. 先試著因式分解成一次及二次多項式的乘積。
2. 而二次多項式的部分先計算判別式，若  $D > 0$ ，則用公式解求實根；若  $D < 0$ ，判斷是否恆正。
3. 一次多項式的次方如果大於 1，則分為次方為奇數及次方為偶數去討論。
4. 畫數線，並標註實根。
5. 由右至左，正負交錯，若遇實根次方為偶數，其左右正負性質相同，實根次方為奇數，其左右正負性質相反。
6. 判斷解的範圍。

### 注意事項

檢查：實根是否為不等式之解

### 關鍵字

恆正

**例題 1****【竹中】**

試求不等式  $(2x+1)^2(x-5)(x^2-2x+3) > 0$  的解為何？

Ans :

因為  $x^2-2x+3$  的判別式  $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8 < 0$

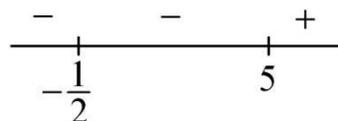
且領導係數大於 0，

所以對所有實數  $x$  來說， $x^2-2x+3 = (x-1)^2 + 2 > 0$  恆成立，

故不影響解的範圍，

即原不等式可改寫為  $(2x+1)^2(x-5) > 0$ ，

故畫數線判斷可知所求為  $x > 5$ 。

**例題 2****【成功】**

設  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$

(1) 求  $f(x)$  之整係數一次因式 (2) 求不等式  $f(x) > 0$  之解為何。

Ans :

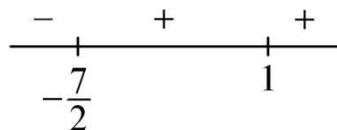
(1) 利用牛頓一次因式檢驗法可知

$$f(x) = (x-1)(2x^2 + 5x - 7) = (x-1)^2(2x+7)$$

所以一次因式為  $x-1, 2x+7$

(2)  $f(x) > 0 \Rightarrow (x-1)^2(2x+7) > 0$

故畫數線判斷可知所求為  $x > -\frac{7}{2}$  但  $x \neq 1$

**例題 3**

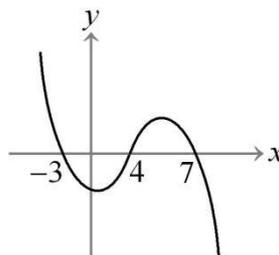
已知  $f(x)$  為實係數三次多項式，若  $f(x)$  的圖形與  $x$  軸交於  $A(-3, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 、 $C(7, 0)$  三點，且點  $P(8, -4)$  在圖形上，則不等式  $f(x) < 0$  的解為何？

Ans :

由題意可以畫出簡圖如右

故可知  $f(x) < 0$  的範圍為

$-3 < x < 4$  或  $x > 7$



## 溫故知新

### 習題 1

【成功】

試求不等式  $(x+1)(x-1)^2(x^2-3) \geq 0$  之解為何？

### 習題 2

【中正】

設  $f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x$

(1) 求  $f(x)$  的整係數一次因式 (2) 解不等式  $f(x) < 0$

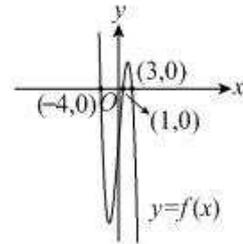
### 習題 3

若  $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x - 8 = 0$  有一根為  $\frac{-1 + \sqrt{23}i}{6}$ ，

試求不等式  $3x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x - 8 > 0$  的解為何？

### 習題 4

右圖為三次函數  $f(x)$  的部分圖形，求不等式  $f(x) < 0$  的解。



## 解答與解析

習題 1：  $x \geq \sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3} \leq x \leq -1$  或  $x = 1$

習題 2： (1)  $x, x-1, x-3$  (2)  $0 < x < 3$  但  $x \neq 1$

習題 3：  $x < -1$  或  $x > 4$

習題 4：  $-4 < x < 1$  或  $x > 3$