

數學 1 進階講義

對數的定義與定律

景美女中・莊瑋倫老師



信望愛文教基金會



3-3-1 & 3-3-2 對數的定義與定律



定理敘述

1. 對數的定義： $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ ，其中 $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

$\log_a b$ 稱為以 a 為底數時 b 的對數， b 稱為真數， a 稱為底數。

2. 對數的種類：

(1) 一般對數：如前定義之對數

(2) 常用對數：以 10 為底數的對數稱為常用對數，將 $\log_{10} b$ 簡記為 $\log b$ 。

3. 對數的基本性質：

設 a 、 b 、 c 為均不等於 1 的正數，且 r 、 s 、 d 為正數

(1) $\log_a a = 1, \log_a 1 = 0$

(2) $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$

(3) $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

(4) $\log_a r^s = s \log_a r$

(5) $r = a^{\log_a r}$

(6) $\log_a r = -\log_a \frac{1}{r} = -\log_{\frac{1}{a}} r$

(7) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 〈換底公式〉

(8) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

(9) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$ 〈連鎖律〉

(10) 設 m 、 n 為實數， $n \neq 0$ ，則 $\log_{a^m} r^n = \frac{n}{m} \log_a r$

(11) 設 m 、 n 為實數，則 $\log_a r = \log_{a^m} r^m = \log_{\sqrt[n]{a}} \sqrt[n]{r}$

(12) $a^{\log_b r} = r^{\log_b a}$

定理證明或說明

1. $\because a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$, 又 $\because a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

2. 設 $\log_a r = x$, $\log_a s = y \Rightarrow r = a^x$, $s = a^y$

$$\because rs = a^{x+y} \therefore \log_a rs = x + y = \log_a r + \log_a s$$

3. 由 2. 可知

$$\because \frac{r}{s} = a^{x-y} \therefore \log_a \frac{r}{s} = x - y = \log_a r - \log_a s$$

4. 設 $x = \log_a r \Rightarrow a^x = r \Rightarrow a^{sx} = r^s \Rightarrow sx = \log_a r^s \Rightarrow s \log_a r = \log_a r^s$

5. 設 $x = \log_a r$, 則 $a^x = r$, 故 $a^{\log_a r} = r$

6. 設 $x = \log_a r$, 則 $a^x = r$

$$\because a^{-x} = \frac{1}{r} \therefore -x = \log_a \frac{1}{r} \Rightarrow x = -\log_a \frac{1}{r}$$

$$\text{又} \because \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = r \therefore -x = \log_{\frac{1}{a}} r \Rightarrow x = -\log_{\frac{1}{a}} r$$

注意事項

1. 對數可將指數的乘除運算化簡為加減運算。
2. 當 $a > 0$, $a \neq 1$ 且 $b > 0$ 時, 對數 $\log_a b$ 才有意義。

關鍵字

指數、對數、底數、真數

例題 1

$$\log_3 \sqrt{6+3\sqrt{3}} - \log_3 \sqrt{2+\sqrt{3}} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

Ans :

$$\begin{aligned}
 \text{所求} &= \log_3 \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \log_3 \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \\
 &= \log_3 \left(\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \right) \\
 &= \log_3 \sqrt{3} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

例題 2

已知 x 為實數，若 $\log_{(6-a)}(x^2 + 4x + a)$ 有意義，試求 a 的範圍。

$$\begin{cases} x^2 + 4x + a > 0 \\ 6 - a > 0 \\ 6 - a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2 - 4a < 0 \\ a < 6 \\ a \neq 5 \end{cases} \Rightarrow 4 < a < 6, a \neq 5$$

例題 3

設 $a = \log 2$ ， $b = \log 3$ ，試以 a ， b 表示 $\log_6 \sqrt{5}(\sqrt{14-4\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}})$ 。

Ans :

$$\begin{aligned}
 \text{所求} &= \log_6 \sqrt{5}(2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
 &= \log_6 (\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}) \\
 &= \frac{\log \sqrt{5} + \log 3\sqrt{3}}{\log 2 + \log 3} \\
 &= \frac{1 - a + 3b}{2a + 2b}
 \end{aligned}$$

例題 4

國際上使用芮氏規模來表示地震強度，

設 $E(r)$ 為地震芮氏規模 r 時震央所釋放出來的能量，其關係為 $\log E(r) = 5.24 + 1.44r$ ，試求芮氏地震規模 7 其震央所釋放能量是芮氏規模 5 其震央所釋放能量的多少倍？

〈 $10^{1.44} = 27.54$ ，用四捨五入法算至整數〉

Ans :

$$\log \frac{E(7)}{E(5)} = 1.44 \times 2 \Rightarrow \frac{E(7)}{E(5)} = 10^{1.44 \times 2} = (27.54)^2 = 758.4516$$

故，四捨五入得 758

例題 5

設 $x = \sqrt{3} + 1$ ，試求 $\log_2(x^3 - x^2 - 4x - 1) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans：

由題意可知 $x = \sqrt{3} + 1$ 為方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 之一根，則

$$\log_2(x^3 - x^2 - 4x - 1) = \log_2[(x^2 - 2x - 2)(x + 1) + 1] = \log_2 1 = 0$$

例題 6

設 α ， β 為方程式 $x^2 + 2x \log 5 + \log \frac{5}{2} = 0$ 之二根，

試求 $10^\alpha + 10^\beta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans：

$$x^2 + 2x \log 5 + \log \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (2 \log 5)x + (\log 5 - \log 2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (2 \log 5)x + (2 \log 5 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow [x + (2 \log 5 - 1)](x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - 2 \log 5 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10^\alpha + 10^\beta = 10^{1-2\log 5} + 10^{-1}$$

$$= \frac{10}{10^{2\log 5}} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{10}{10^{\log 25}} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{10}{25} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{1}{2}$$



溫故知新

習題 1

$$\log_2(\sqrt{7+\sqrt{40}} - \sqrt{7-\sqrt{40}}) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 2

$$\text{若 } 2^{\log_3 x} = 4, \text{ 則 } x = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 3

$$\log 3 + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{1}{99}\right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 4

$$\text{若 } \log_a x = \log_b y = \frac{-1}{2} \log_c 2, \text{ 其中 } a、b、c \text{ 均為不等於 } 1 \text{ 的正數，}$$

$$\text{且 } x > 0, y > 0, c = \sqrt{ab}, \text{ 則 } xy = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 5

$$\text{若 } \log 2 = a, \log 3 = b, \text{ 則}$$

$$(1) 10^{3a+2b+1} = \underline{\hspace{2cm}}, (2) \log 7.5 = \underline{\hspace{2cm}}。(以 a、b \text{ 表示})$$

習題 6

$$\text{已知 } 2\log_2 \sqrt{15} - \log_2 \frac{200}{3} = a + b\log_2 3 + c\log_2 5, \text{ 且 } a、b、c \text{ 皆為整數，}$$

$$\text{試求 } a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 7

【學測 93】

$$\text{設 } a、b、c \text{ 為正整數，若 } a\log_{520} 2 + b\log_{520} 5 + c\log_{520} 13 = 3,$$

$$\text{則 } a+b+c = \underline{\hspace{2cm}}。$$

以下各數何者為正？

(1) $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$ (2) $\log_2 3 - 1$ (3) $\log_3 2 - 1$ (4) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ (5) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$



解答與解析

習題 1 : $\frac{3}{2}$

習題 2 : 9

習題 3 : 2

習題 4 : $\frac{1}{2}$

習題 5 : (1) 720 (2) $1+b-2a$

習題 6 : -2

習題 7 : 15

由題意可知，

$$2^a \times 5^b \times 13^c = 520^3 = (2^3 \times 5 \times 13)^3 = 2^9 \times 5^3 \times 13^3$$

因此 $a+b+c=15$

習題 8 : (1)(2)(5)

(1) $\because \sqrt{2} > \sqrt[3]{2} \therefore \sqrt{2} - \sqrt[3]{2} > 0$

(2) $\log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} \because \log_2 \frac{3}{2} > \log_2 \frac{2}{2} = 0 \therefore \log_2 \frac{3}{2} > 0$

(3) $\log_3 2 - 1 = \log_3 \frac{2}{3} \because \log_3 \frac{2}{3} < \log_3 \frac{3}{3} = 0 \therefore \log_3 \frac{2}{3} < 0$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3 < 0$

(5) $\because \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} = \log_3 2 > \log_3 1 \therefore \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$

故選(1)(2)(5)