

高中數學

進階
講義

條件機率

陳清海 老師



信望愛文教基金會

lt99ok233 條件機率與貝氏定理

主題一、條件機率

定義：設 A, B 為兩事件， $P(A) > 0$ 。在事件 A 發生的情況下，事件 B 發生的機率

稱為 B 的條件機率，以 $P(B|A)$ 表示，

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} .$$

【例題 1】【配合課本例 1】

擲一骰子兩次，在已知兩次的點數和為 8 的條件下，求第一次點數大於第二次點數的機率。

Ans : $\frac{2}{5}$

【詳解】

設 A 為兩次的點數和為 8 的事件，

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} .$$

設 B 為第一次點數大於第二次點數的事件。

$$A \cap B = \{(5,3), (6,2)\} .$$

$$\text{故機率爲 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5} .$$

【類題 1】

擲三枚均勻的銅板一次，求在至少出現一個正面的條件下，恰好出現兩個正面的機率。

Ans : $\frac{3}{7}$

【詳解】

設 A 表至少出現一次正面的事件， B 表恰出現二正面的事件，

$$A = \{(+,+, -), (+,-,+), (-,+,+), (+,-,-), (-,+,-), (-,-,+), (+,+,+)\} ,$$

$$B = \{(+,+, -), (+,-,+), (-,+,+)\} ,$$

$$\text{故機率爲 } P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{7} .$$

【例題 2】【配合課本例 2、例 3】

某語言學校中，有 40% 的學生會日語，有 25% 的學生會西班牙語，有 15% 的學生兩種語言都會。今任選一名學生，

- (1) 已知他會日語，求他也會西班牙語的機率。
- (2) 已知他不會西班牙語，求他會日語的機率。

Ans : (1) $\frac{3}{8}$, (2) $\frac{1}{3}$

【詳解】

設 A 為會日語的事件， B 為會西班牙語的事件。

$$(1) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.15}{0.4} = \frac{3}{8} .$$

$$(2) \quad P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.4 - 0.15}{1 - 0.25} = \frac{1}{3} .$$

【類題 2】

學期結束，教務處公告：全校學生中，有 $\frac{2}{5}$ 英文不及格，

有 $\frac{3}{8}$ 數學不及格，有 $\frac{1}{4}$ 兩科都不及格。今任選一學生，

(1) 若已知他數學不及格，那麼他英文也不及格的機率為何？

(2) 若已知他英文不及格，那麼他數學也不及格的機率為何？

Ans : (1) $\frac{2}{3}$, (2) $\frac{5}{8}$

【詳解】

令 A 表英文不及格的事件， B 表數學不及格的事件。

依題意， $P(A) = \frac{2}{5}$ ， $P(B) = \frac{3}{8}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ 。

(1) 在 B 發生的條件下， A 發生的機率為

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3} .$$

(2) 在 A 發生的條件下， B 發生的機率為

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{8} .$$

【例題 3】

設 A, B 為樣本空間 S 中的兩事件，

已知 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, 且 $P(A \cup B) = \frac{11}{12}$, 試求 $P(A|B)$ 及 $P(B|A)$ 的值。

Ans : (1) $\frac{2}{9}$, (2) $\frac{1}{2}$

【詳解】

因為 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$$\frac{11}{12} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - P(A \cap B), \text{ 得 } P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},$$

$$\text{故 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9},$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

【類題 3】

設 A, B 為樣本空間 S 中的兩事件，已知

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \text{且 } P(A \cup B) = \frac{3}{4}, \text{ 求}$$

$$(1) \quad P(A|B), \quad (2) \quad P(A'|B').$$

Ans : (1) $\frac{2}{5}$, (2) $\frac{2}{3}$

【詳解】

因為 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{8} + P(B) - \frac{1}{4}, \text{ 得 } P(B) = \frac{5}{8}.$$

$$(1) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5} \quad .$$

$$(2) \quad P(A'|B') = \frac{P(A' \cap B')}{P(B')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3} \quad .$$

主題二、條件機率的乘法定理

設 A, B, C 是三事件 .

1. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$. (其中 $P(A) > 0$)

2. $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$. (其中 $P(A \cap B) > 0$)

【例題 4】【配合課本例 4】

設 10 枝籤中有 3 枝籤是有獎的，今有甲、乙、丙等十人依序各抽出一枝籤，抽出後不放回。

(1) 求甲、乙、丙三人每人抽中有獎籤的機率。

(2) 這十人依先後次序抽籤，每人抽中有獎籤的機率是否相等？

Ans : (1) $\frac{3}{10}$, (2) 相等

【詳解】

$$(1) \quad P(\text{甲}) = \frac{3}{10},$$

$$P(\text{乙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10},$$

$$P(\text{丙}) = P(\text{甲} \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙} \cap \text{丙}) + P(\text{甲} \cap \text{乙}' \cap \text{丙}) + P(\text{甲}' \cap \text{乙}' \cap \text{丙})$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10},$$

$$\text{故 } P(\text{甲}) = P(\text{乙}) = P(\text{丙}) = \frac{3}{10}.$$

$$(2) \quad \text{第 } k \text{ 個人抽中的機率為 } P_k = \frac{n(A)}{n(S)},$$

其中樣本空間 s 表 3 個有獎籤與 7 個無獎籤排成一系列的情形，
則是 s 中第 k 個位置排有獎籤的情形。

$$\text{因此, } P_k = \frac{\frac{9!}{2!7!}}{\frac{10!}{3!7!}} = \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

故每個人抽中有獎籤的機率都是 $\frac{3}{10}$ ，即都相等。

【類題 4】

設 10 枝籤中有 3 枝籤是有獎的，今有甲、乙、丙等十人依序各抽出一枝籤，抽出後不放回，求

(1) 甲乙兩人都中獎的機率。

(2) 只有丙中獎的機率。

Ans : (1) $\frac{1}{15}$, (2) $\frac{7}{40}$

【詳解】

(1) 甲乙兩人都中獎的機率為

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} .$$

(2) 只有丙中獎的機率為

$$P(A' \cap B' \cap C) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{7}{40} .$$

【例題 5】【配合課本例 5】

袋中有 2 個黑球，4 個白球，今由袋中取球三次，一次一球取出後不放回，求

(1) 依次取出白球，黑球，白球的機率。

(2) 共取到 2 白球 1 黑球的機率。

Ans : (1) $\frac{1}{5}$, (2) $\frac{3}{5}$

【詳解】

(1) 依次取出白球，黑球，白球的

機率為 $\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{5} .$

(2) 共取到 2 白球 1 黑球的情況為

(白, 白, 黑), (白, 黑, 白), (黑, 白, 白),

故機率為 $\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} .$

【類題 5】

袋中有 1 白球 2 黑球，自袋中取走一球，再放入一顆白球或黑球（放入白球或黑球的機率相等）。問經過一次操作後，袋中會變成 3 黑球的機率是多少？

Ans : $\frac{1}{6}$

【詳解】

從 1 白 2 黑球變成 3 黑，表示取出 1 白球放入 1 黑球，

機率為 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} .$

【例題 6】

甲、乙兩人輪流擲一骰子，依「甲乙、甲乙、…」的順序直到 6 點出現為止，今以先擲得 6 點為勝，則甲獲勝的機率為何？

Ans : $\frac{6}{11}$

【詳解】

$$\text{所求} = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} + \cdots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} .$$

【類題 6】

甲、乙兩人輪流擲一骰子，依「甲乙乙甲、甲乙乙甲、…」的順序直到 6 點出現為止，今以先擲得 6 點為勝，則甲獲勝的機率為何？

Ans : $\frac{31}{61}$

【詳解】

$$\begin{aligned} \text{所求} &= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^7 \times \frac{1}{6} + \cdots \\ &= \frac{1}{6} \left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots \right] + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \left[1 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \cdots \right] \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1296}{671} + \frac{125}{1296} \times \frac{1296}{671} = \frac{341}{671} = \frac{31}{61} . \end{aligned}$$

主題三、貝氏定理

1. 分割：設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為樣本空間 S 的 n 個事件，當
 - (1) $A_1, A_2, \dots, A_n$ 兩兩互斥
 - (2) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = S$ 時，稱 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一組分割。
2. 貝氏定理：設 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一組分割， B 為 S 的任一個事件。若 $P(B) > 0$ ， $P(A_i) > 0$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，則在事件 B 發生的情況下，事件 A_k 發生的機率為

$$P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

【例題 7】 【配合課本例 6】

甲袋有 2 個黑球，3 個白球；乙袋有 2 個黑球，2 個白球。

今由甲乙兩袋中任選一袋取出 2 球，

(1) 求此兩球為 1 黑球 1 白球的機率。

(2) 已知兩球為 1 黑球 1 白球，求此 2 球來自乙袋的機率。

$$\text{Ans : (1) } \frac{19}{30}, (2) \frac{10}{19}$$

【詳解】

(1) 選中甲袋且取出 1 黑球 1 白球，

$$\text{機率為 } \frac{1}{2} \times \frac{C_1^2 \cdot C_1^3}{C_2^5} = \frac{3}{10},$$

選中乙袋且取出 1 黑球 1 白球，

$$\text{機率為 } \frac{1}{2} \times \frac{C_1^2 \cdot C_1^2}{C_2^4} = \frac{1}{3},$$

$$\text{故機率為 } \frac{3}{10} + \frac{1}{3} = \frac{19}{30}.$$

$$(2) \quad P(\text{乙袋} | 1 \text{黑} 1 \text{白}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{10}{19}.$$

【類題 7】

設 A 袋有 5 紅球，7 黑球；B 袋有 2 紅球，4 黑球；C 袋有 12 紅球，3 黑球；

若隨機取出一袋，再由其中選出一球，

(1) 求此球為紅球的機率。

(2) 在此球為紅球的條件下，求此球取自 A 袋的機率。

$$\text{Ans : (1) } \frac{31}{60}, (2) \frac{25}{93}$$

【詳解】

$$(1) \text{ 所求 } = \frac{1}{3} \times \frac{5}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{25}{180} + \frac{20}{180} + \frac{48}{180} = \frac{93}{180} = \frac{31}{60}.$$

$$(2) \text{ 所求} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{12}}{\frac{31}{60}} = \frac{25}{93} .$$

【例題 8】 【配合課本例 7】

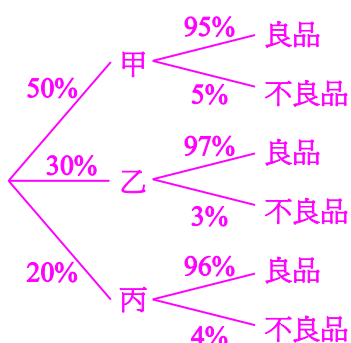
設某工廠由甲、乙、丙三部機器製造同一產品，工廠的全部產量中甲占 50%，乙占 30%，丙占 20%，又依過去經驗知甲的產品中有 5%，乙有 3%，丙有 4% 為不良品，今從全部產品中任選一產品，求

(1) 選得不良品的機率。

(2) 已選得不良品時，求此不良品為甲所生產的機率。

$$\text{Ans : (1) } \frac{21}{500} , (2) \frac{25}{42}$$

【詳解】



$$(1) \text{ 所求} = \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{4}{100} = \frac{420}{10000} = \frac{21}{500} .$$

$$(2) \text{ 所求} = \frac{\frac{50}{100} \times \frac{5}{100}}{\frac{21}{500}} = \frac{\frac{1}{40}}{\frac{21}{500}} = \frac{25}{42} .$$

【類題 8】

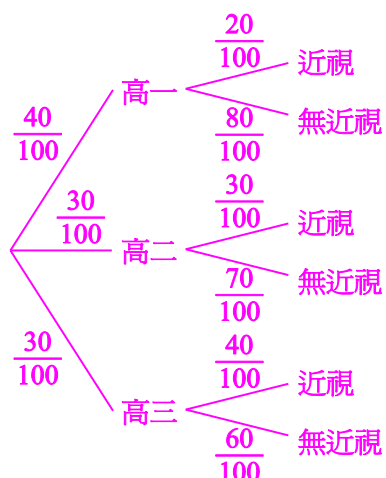
某校學生中，高一占 40%，高二占 30%，高三占 30%，又知高一學生中 20% 是近視，高二學生中 30% 是近視，高三學生中 40% 是近視，由該校學生中任選一人，

(1) 求此人恰為近視者的機率。

(2) 已知該生不是近視，求該學生是高二的機率。

Ans : (1) $\frac{29}{100}$, (2) $\frac{21}{71}$

【詳解】



$$(1) \quad P(\text{近視}) = \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{40}{100} = \frac{29}{100} .$$

$$(2) \quad P(\text{高二} | \text{不近視}) = \frac{\frac{30}{100} \times \frac{70}{100}}{\frac{40}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{60}{100}} \\ = \frac{21}{32 + 21 + 18} = \frac{21}{71} .$$

【例題 9】 【配合課本例 8】

醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 5% 的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢為患有該病。已知全部男性人口中有 0.2% 的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。求該役男確實染病的機率。

Ans : $\frac{20}{519}$

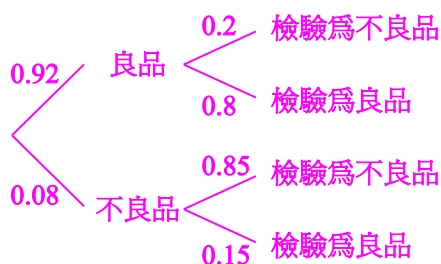
【詳解】

機率為 $\frac{0.2\% \times 100\%}{0.2\% \times 100\% + 99.8\% \times 5\%} = \frac{20}{20 + 499} = \frac{2}{499} .$

【類題 9】

根據以往紀錄，育才公司品管部將良品檢驗為不良品的機率為 0.20，將不良品檢驗為良品的機率為 0.15。已知該公司的產品中，不良品占 8%，良品占 92%。若一件產品被檢驗為不良品，求該產品確實為不良品的機率。

Ans : $\frac{17}{63}$

【詳解】

$$\text{機率為 } \frac{0.08 \times 0.85}{0.92 \times 0.2 + 0.08 \times 0.85} = \frac{8 \times 85}{92 \times 20 + 8 \times 85} = \frac{17}{63}.$$

【例題 10】 【常考題】

假設有三張桌子，每一張桌子各有兩個抽屜，第一張桌子的每一個抽屜裡各放一個金幣，第二張桌子裡的一個抽屜放一個金幣，另一個抽屜放一個銀幣；第三張桌子的每一個抽屜各放一個銀幣。若隨意打開一張桌子中的一個抽屜，發現裡面放的是一個金幣，求這張桌子的另一個抽屜也是放金幣的機率。

Ans : $\frac{2}{3}$

【詳解】

$$P(\text{兩抽屜都是金幣} | \text{一抽屜是金幣}) = \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

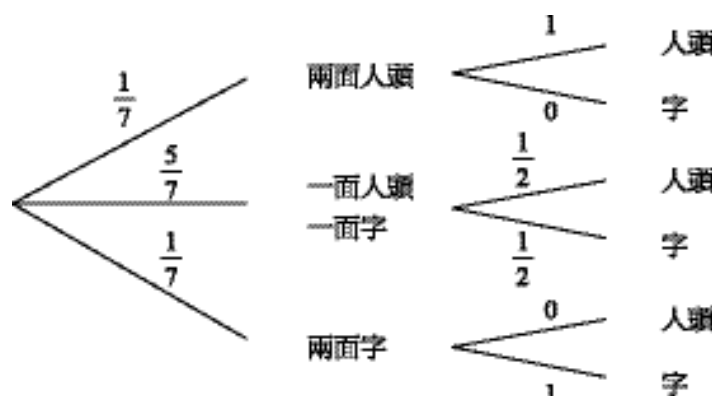
【類題 10】

有置於黑箱中的 7 枚硬幣，其中一枚兩面皆是人頭，一枚兩面皆是字，其餘 5 枚一面是人頭一面是字，將手伸入箱中握住一枚硬幣，取出後打開手掌，發現一面是人頭，試問另一面也是人頭的機率是多少？

Ans : $\frac{2}{7}$

【詳解】

依題意畫樹狀圖如下：



設事件 A 表取出的硬幣朝上的那一面是人頭，

事件 B 表另一面是人頭．因為朝上那一面是人頭的硬幣有兩種情形，

$$\text{所以 } P(A) = \frac{1}{7} \times 1 + \frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

又因為事件 $A \cap B$ 表示兩面是人頭的事件，

$$\text{所以 } P(A \cap B) = \frac{1}{7}.$$

因此，朝上那一面是人頭，另一面也是人頭的機率

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}.$$

【例題 11】【常考題】

甲外出時，平均每五次有一次忘記帶回自己的雨傘的習慣，

有一天帶著雨傘依 A 、 B 、 C 順序訪問此三家，

回家後才發現忘記帶回雨傘，求雨傘放在 B 家的機率．

$$\text{Ans : } \frac{20}{61}$$

【詳解】

$$P(\text{忘在 } B | \text{忘}) = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{20}{25 + 20 + 16} = \frac{20}{61}.$$

【類題 11】

某人上班有甲、乙兩條路線可供選擇。早上定時從家裡出發，走甲路線有 $\frac{1}{10}$ 的機率會遲到，走乙路線則有 $\frac{1}{5}$ 的機率會遲到，無論走哪一條路線，只要不遲到，下次就走同一條路線，否則就換另一條路線，假設他第一天走甲路線，則第三天也走甲路線的機率為何？

Ans : $\frac{83}{100}$

【詳解】

(甲準 $\rightarrow$ 甲準 $\rightarrow$ 甲) + (甲遲 $\rightarrow$ 乙遲 $\rightarrow$ 甲)

$$= \left(\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times 1 \right) + \left(\frac{1}{10} \times \frac{1}{5} \times 1 \right) = \frac{81+2}{100} = \frac{83}{100} .$$

主題四、獨立事件

1. 兩事件獨立的定義：

當兩事件 A 與 B 滿足 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ 時，稱 A 與 B 為獨立事件，否則稱為相關事件。

2. 若 A 與 B 為獨立事件，則下列三組事件亦獨立：

(1) A' 與 B . (2) A 與 B' . (3) A' 與 B' .

3. 三事件獨立的定義：下列 4 條件均成立時，稱 A, B, C 三事件獨立。

(1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

(2) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$.

(3) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.

(4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

4. A, B, C 三事件獨立，則下列各組事件亦獨立：

(1) A', B, C . (2) A, B', C . (3) A, B, C' .

(4) A', B', C . (5) A', B, C' . (6) A, B', C' . (7) A', B', C' .

【例題 12】【配合課本例 9】

擲一個骰子兩次，考慮下列三事件：

A ：第一次出現奇數點， B ：兩次的點數和是偶數， C ：兩次的點數積為奇數。

(1) A 與 B 是否為獨立事件？

(2) A 與 C 是否為獨立事件？

Ans：(1) 是，(2) 不是

【詳解】

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{兩次都偶數或兩次都奇數}),$$

$$P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad (\text{兩次都奇數}).$$

$$(1) \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B), \quad A \text{ 與 } B \text{ 為獨立事件}.$$

$$(2) \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(C), \quad A \text{ 與 } C \text{ 不為獨立事件}.$$

【類題 12】

丟一硬幣 3 次， A 表示至少有一次正面的事件， B 表示第二次是正面的事件， C 表示三次為同一面的事件。

(1) A 與 B 是否為獨立事件？

(2) B 與 C 是否為獨立事件？

Ans：(1) 不是，(2) 是

【詳解】

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$(1) \quad P(A \cap B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \neq P(A) \cdot P(B), \quad A \text{ 與 } B \text{ 不為獨立事件}.$$

$$(2) \quad P(B \cap C) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C), \quad B \text{ 與 } C \text{ 為獨立事件}.$$

【例題 13】【配合課本例 10、例 11】

已知服用某藥物治療流行性感冒，治癒率為 80%，

今有甲乙兩人同時因流行性感冒服用此藥物，求

(1) 兩人都被治癒的機率。

(2) 恰有一人被治癒的機率。

Ans : (1) 0.64 , (2) 0.32

【詳解】

設 A 表甲被治癒的事件, B 表乙被治癒的事件 .

$$P(A) = P(B) = 0.8 .$$

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.8 \times 0.8 = 0.64 .$$

$$(2) \quad P(A \cap B') + P(A' \cap B) = 0.8 \times 0.2 + 0.2 \times 0.8 = 0.32 .$$

【類題 13】

甲生解題平均 4 題答對 3 題, 乙生解題平均 6 題答對 5 題,
若兩人解題為獨立事件, 今兩人同解一題, 求此題被解出的機率 .

Ans : $\frac{23}{24}$

【詳解】

$$\text{所求} = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{23}{24} .$$

【例題 14】 【配合課本例 12】

袋中有編號為 1 到 9 的球各一個, 自袋中任取一球 . 設 A 為取到球號為 1, 3, 5 的事件, B 為取到球號為 2, 3, 4 的事件, C 為取到球號為 3, 6, 9 的事件 . 試問 A, B, C 三事件是否獨立?

Ans : 不

【詳解】

依題意, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. 另外, 因為

$$A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C = \{3\} , \text{ 所以}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{9} = P(A) \cdot P(B) ,$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{9} = P(B) \cdot P(C) ,$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{9} = P(A) \cdot P(C) ,$$

但是 $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{9} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$,

故 A, B, C 不是獨立事件。

【類題 14】

擲一個骰子一次，考慮下列三事件：

A ：點數為 6 的因數， B ：點數是偶數， C ：點數為 4 的因數。

(1) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ 是否成立？

(2) A, B, C 三事件是否獨立？

Ans：(1) 是，(2) 不

【詳解】

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 4\},$$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\text{且 } P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = \frac{1}{3}.$$

$$(1) \quad A \cap B \cap C = \{2\},$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

$$(2) \quad P(B \cap C) = \frac{1}{3} \neq P(B) \cdot P(C), \text{ 故 } A, B, C \text{ 不是獨立事件。}$$

【例題 15】【配合課本例 13】

甲，乙，丙三人解出某問題的機率分別為 0.4, 0.5, 0.6。

三人解出與否為獨立事件，求

(1) 至少有一人解出此問題的機率。

(2) 恰有一人解出此問題的機率。

(3) 已知三人中恰有一人解出此問題，求此題是由甲解出的機率。

Ans：(1) 0.88，(2) 0.38，(3) $\frac{4}{19}$

【詳解】

設 A, B, C 分別表甲，乙，丙獨立解決問題的事件，

其機率 $P(A)=0.4$, $P(B)=0.5$, $P(C)=0.6$.

(1) 至少有一人解出此問題的機率為 $P(A \cup B \cup C)$.

利用取捨原理及 A, B, C 是獨立事件, 得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C) \\ &= 0.4 + 0.5 + 0.6 - 0.4 \times 0.5 - 0.5 \times 0.6 - 0.4 \times 0.6 + 0.4 \times 0.5 \times 0.6 = 0.88 . \end{aligned}$$

故至少有一人解出此問題的機率為 0.88 .

(2) 恰有一人解出此問題的機率為

$$\begin{aligned} P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C) \\ = 0.4 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.4 + 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.38 . \end{aligned}$$

(3) 機率為 $\frac{0.4 \times 0.5 \times 0.4}{0.38} = \frac{1}{19}$.

【類題 15-1】

甲, 乙, 丙三人射擊的命中率分別為 $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ (假設三人彼此互不影響),

今三人向同靶各射擊一發子彈, 求

(1) 此靶會被射中的機率 .

(2) 靶面恰中一彈的機率 .

(3) 在已知靶面恰中一彈的條件下, 求其為甲射中的機率 .

Ans : (1) $\frac{9}{10}$, (2) $\frac{5}{12}$, (3) $\frac{4}{25}$

【詳解】

設 A, B, C 分別代表甲、乙、丙命中靶面的事件 .

(1) 此靶會被射中的機率為 $1 - P(A' \cap B' \cap C') = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{9}{10}$.

(2) 靶面恰中一彈的機率為

$$P(A \cap B' \cap C') + P(A' \cap B \cap C') + P(A' \cap B' \cap C)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} .$$

$$(3) \quad P(\text{甲射中} | \text{恰中一彈}) = \frac{P(\text{恰中一彈} \cap \text{甲射中})}{P(\text{恰中一彈})}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{25} .$$

【類題 15-2】

甲乙兩人打靶的命中率分別為 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 今兩人朝同一目標射擊一次
且互不影響。下列選項何者正確？

(1) 兩人同時命中目標的機率為 $\frac{7}{12}$

(2) 目標被命中的機率為 $\frac{7}{12}$

(3) 恰一人命中目標的機率為 $\frac{5}{12}$

(4) 若恰一人命中目標，是甲命中的機率為 $\frac{3}{5}$

(5) 若恰一人命中目標，是乙命中的機率為 $\frac{1}{4}$ 。

Ans : (3)(4)

【詳解】

(1) 兩人同時命中目標的機率為 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ 。

(2) 目標被命中的機率為 $1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ 。

(3) 恰一人命中目標的機率為 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

(4) 若恰一人命中目標，是甲命中的機率為 $\frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$ 。

(5) 若恰一人命中目標，是乙命中的機率為 $\frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$.

答案為(3)(4) .

【例題 16】【常考題】

已知某飛彈擊中目標的機率為 $\frac{4}{5}$.

- (1) 若同時發射 2 枚飛彈，則擊中目標（即至少中 1 發）的機率為何？
 (2) 請問至少要同時發射多少枚飛彈，才能使擊中目標的機率提高到 99.9%？

Ans : (1) $\frac{24}{25}$, (2) 5

【詳解】

$$(1) \quad P(\text{擊中目標}) = 1 - P(2 \text{發均不中}) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25} .$$

(2) 設發射 n 枚飛彈，則

$$P(\text{擊中目標}) = 1 - P(n \text{發均不中}) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n .$$

由題意，得 $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \geq 99.9\%$ ，即

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq 0.001$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \log 0.001$$

$$\Rightarrow n(-\log 5) \leq -3$$

$$\Rightarrow n(-0.6990) \leq -3$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{3}{0.6990} = 4.29 \dots$$

$$\Rightarrow n \geq 5 ,$$

故至少要同時發射 5 枚飛彈 .

【類題 16】

某人射擊，平均 5 發 3 中，今連續射擊 n 發，求

(1) n 發均未命中的機率。

(2) 若欲使 n 發中至少射中一發的機率大於 0.999，則 n 的最小值為何？

($\log 2 = 0.3010$)

Ans : (1) $\left(\frac{2}{5}\right)^n$, (2) 8

【詳解】

$$(1) \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

$$(2) 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n > 0.999$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^n > 1000$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{5}{2}\right)^n > \log 1000$$

$$\Rightarrow n(\log 5 - \log 2) > 3$$

$$\Rightarrow n > \frac{3}{\log 5 - \log 2} = \frac{3}{0.699 - 0.301} = \frac{3}{0.398} \doteq 7.5, \because n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n \geq 8,$$

故 n 的最小值為 8 .

【例題 17】 【常考題】

若 A, B 為獨立事件， $P(A) = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ，求

$$(1) P(B)$$

$$(2) P(A|B)$$

$$(3) P(B'|A) .$$

Ans : (1) $\frac{5}{8}$, (2) $\frac{1}{3}$, (3) $\frac{3}{8}$

【詳解】

$$(1) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \Rightarrow \frac{5}{12} = \frac{2}{3}P(B), \quad \therefore P(B) = \frac{5}{8}.$$

$$(2) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{5}{8}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{3}.$$

$$(3) \quad P(B'|A) = \frac{P(B' \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}.$$

【類題 17】

若 A, B 為獨立事件, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, 求

$$(1) \quad P(B)$$

$$(2) \quad P(A'|B).$$

Ans : (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{2}{3}$

【詳解】

$$(1) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B),$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{3}P(B),$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}.$$

$$(2) \quad P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

【例題 18】

袋中有 5 個相同大小的球，分別標上 1, 2, 3, 4, 5。從袋中每次取出一球，記錄其號碼後放回袋中。若連取 5 次，則前兩球號碼的乘積與後三球號碼的乘積之和為奇數的機率為何？（算至小數點後第二位）

Ans : 0.42

【詳解】

取後放回，所以每次

取到奇數的機率為 $\frac{3}{5}$ ，取到偶數的機率為 $\frac{2}{5}$ 。

兩數之和為奇數的情況為一偶數一奇數，其機率為

$$\left(1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{1314}{3125} \approx 0.42。$$

【類題 18】

擲一公正骰子，若出現 1 點或 2 點，則在數線上將質點向右移 2 單位，若出現 3 點或 4 點，則在數線上將質點向左移 1 單位，若出現 5 點或 6 點，則不移動質點。今質點在數線上原點位置，連擲骰子六次，求質點落在 3 位置的機率。

Ans : $\frac{80}{729}$

【詳解】

設向右、向左、不動的次數分別為 x, y, z 次，

則有 $x + y + z = 6$ ，且 $2x - y = 3$ ，

列出合條件之非負整數 $(2, 1, 3), (3, 3, 0)$ 。

每種情形的機率均為 $\frac{1}{3}$ ，且為獨立事件，

$$\text{故所求機率為 } \left(\frac{6!}{2!1!3!} + \frac{6!}{3!3!}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{80}{729}。$$

lt99ok233 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 下列敘述何者正確？

- (1) 若 A, B 為獨立事件，則 A', B 也是獨立事件。
- (2) 若 A, B 為互斥事件，且 $P(A)P(B) \neq 0$ ，則 A, B 必為相關事件。
- (3) 若 A, B 為獨立事件， B, C 為獨立事件，則 A, C 也是獨立事件。
- (4) 若 A, B 為獨立事件， B, C 為獨立事件， C, A 為獨立事件，則 A, B, C 三事件獨立。
- (5) 若 A, B, C 為獨立事件，則 $P(A|B \cap C) = P(A|B)$ 。

Ans : (1)(2)(5)

【詳解】

- (1) 若 A, B 為獨立事件，則

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \text{ 得}$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$= P(B)[1 - P(A)] = P(B) \cdot P(A')$$
 故 A', B 也是獨立事件。
- (2) 若 A, B 為互斥事件，故 $P(A \cap B) = 0$ ，
 又 $P(A)P(B) \neq 0$ ，得 $P(A) \neq 0$ ，且 $P(B) \neq 0$ ，
 故 $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ ，
 即 $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ ，故 A, B 必為相關事件。
- (3) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ 不一定成立。
- (4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ 不一定成立。
- (5) A, B, C 為獨立事件，則

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)}{P(B) \cdot P(C)} = P(A),$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A),$$

故 $P(A|B \cap C) = P(A|B)$ 。

2. 有 A, B 兩箱, A 箱中放有 1 白球 1 黑球, B 箱中有 1 白球。每次由 A 箱中任取一球放入 B 箱, 再從 B 箱中任取一球放回 A 箱稱作一局。

(1) 求第一局結束後, A 箱中為 1 白球 1 黑球的機率。

(2) 求第二局結束後, A 箱中為 1 白球 1 黑球的機率。

Ans : (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{11}{16}$

【詳解】

- (1) 從 A 箱中取白球, 或
從 A 箱中取黑球, 再從 B 箱中取黑球,

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}。$$

$$(2) \quad p_2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{16}。$$

3. 某公司共有 6 個工廠, 各工廠的產量都一樣, 且所生產的產品都放進同一倉庫中。

由過去的經驗知道, 第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$, 其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$, 爲

了檢驗倉庫中這一批產品的品質, 從倉庫中任意抽出一件, 若爲不良品, 則此不良品是來自第五個工廠的機率爲何? 【96 指甲】

Ans : $\frac{5}{21}$

【詳解】

$$p(\text{不良品}) = \frac{1+2+3+4+5+6}{50} = \frac{21}{50},$$

$$p(\text{五/不良品}) = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{21}{50}} = \frac{5}{21}。$$

4. 目前黑心商品充斥市面, 設買到黑心滑鼠的機率爲 0.05, 且黑心滑鼠在使用一年內損壞的機率爲 0.6, 而一般正常的滑鼠在使用一年內損壞的機率爲 0.04。若小明買了一個滑鼠用不到一年就壞了, 求他買到黑心滑鼠的機率。

Ans : $\frac{15}{34}$

【詳解】

$$p(\text{黑心/損壞}) = \frac{0.05 \times 0.6}{0.05 \times 0.6 + 0.95 \times 0.04} = \frac{30}{30 + 38} = \frac{30}{68} = \frac{15}{34}。$$

5. 袋中有 3 紅球，5 白球。甲、乙二人輪流由袋中一次取一球，由甲先開始。

(1) 若每次取出均不放回，規定先取得紅球者獲勝，求甲獲勝的機率。

(2) 若每次取出後均放回，規定先取得紅球者獲勝，求甲獲勝的機率。

Ans : (1) $\frac{17}{28}$, (2) $\frac{8}{13}$

【詳解】

$$(1) p(\text{甲}) = p(\text{甲紅}) + p(\text{甲白乙白甲紅}) + p(\text{甲白乙白甲白乙白甲紅})$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} + \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{17}{28}。$$

$$(2) p(\text{甲}) = \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 \frac{3}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^4 \frac{3}{8} + \dots$$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{25}{64}} = \frac{24}{64 - 25} = \frac{24}{39} = \frac{8}{13}。$$

6. 某人投籃，第一球投中之機率為 0.6，之後若前一球中，則下一球的命中率為 0.8；若前一球不中，則下一球的命中率為 0.4。此人連投三球。

(1) 求恰中一球的機率。

(2) 若知此人恰中一球，求是第三球才投進的機率。

Ans : (1) 0.2 , (2) 0.48

【詳解】

設第一球投進之事件為 A，

第二球投進之事件為 B，

第三球投進之事件為 C，

(1) p(恰中一)

$$= p(A \cap B' \cap C') + p(A' \cap B \cap C') + p(A' \cap B' \cap C)$$

$$= 0.6 \times 0.2 \times 0.6 + 0.4 \times 0.4 \times 0.2 + 0.4 \times 0.6 \times 0.4 = 0.2。$$

$$(2) p(\text{第三球投進/恰中一球}) = \frac{0.4 \times 0.6 \times 0.4}{0.2} = 0.48。$$

7. 設 9 枝籤中有 4 枝籤是有獎的，今有甲、乙、丙三人，按甲、乙、丙的順序各抽出一枝籤，抽出後不再放回．選出正確的選項：

- (1) 甲、乙均抽中有獎籤的機率為 $\frac{1}{6}$
- (2) 若已知甲抽中的條件下，則乙沒抽中的機率為 $\frac{5}{18}$
- (3) 丙抽中的機率為 $\frac{4}{9}$
- (4) 若已知恰有一人抽中的條件下，則是丙抽中的機率為 $\frac{1}{3}$ 。

Ans：(1)(3)(4)

【詳解】

設甲抽中的事件為 A，乙抽中的事件為 B，丙抽中的事件為 C，

甲、乙均抽中有獎籤的機率為 $\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{6}$ 。

若已知甲抽中的條件下，則乙沒抽中的機率為 $\frac{5}{8}$ 。

$$\begin{aligned} p(C) &= p(A \cap B \cap C) + p(A \cap B' \cap C) + p(A' \cap B \cap C) + p(A' \cap B' \cap C) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} \\ &= \frac{24 + 60 + 60 + 80}{9 \times 8 \times 7} = \frac{224}{9 \times 8 \times 7} = \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

即丙抽中的機率為 $\frac{4}{9}$ 。

- (4) 若已知恰有一人抽中的條件下，
則是丙抽中的機率為

$$\begin{aligned} & \frac{p(A' \cap B' \cap C)}{p(A \cap B' \cap C) + p(A' \cap B \cap C) + p(A' \cap B' \cap C)} \\ &= \frac{\frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{4}{7}} = \frac{80}{80 + 80 + 80} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

【備註】其實，每人抽中的機率都是 $\frac{4}{9}$ 。

8. 甲、乙、丙三人各擲一粒公正骰子，已知三人擲出點數和為10，求甲擲出點數2的機率。

Ans : $\frac{5}{27}$

【詳解】

$\{(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)\}$

共有 $6+6+3+6+3+3=27$ 個樣本點，

其中甲擲出2點的子集有 $2+2+1=5$ 個樣本點，故

$$P(\text{甲擲出點數2/點數和為10}) = \frac{5}{27}。$$

進階題

9. 甲說實話的機率為 $\frac{7}{10}$ ，乙說實話的機率為 $\frac{9}{10}$ ，

今有一袋內有3白球，7黑球，若自袋中任取一球，求

(1) 甲、乙看了都說是白球的機率。

(2) 若在甲、乙都說是白球的條件下，此球確實為白球的機率。

Ans : (1) $\frac{21}{100}$ ，(2) $\frac{9}{10}$

【詳解】

(1) $P(\text{二人都說是白球})$

$= P(\text{是白球且甲說實話且乙說實話})$

$+ P(\text{是黑球且甲說謊且乙說謊})$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{21}{100}。$$

(2) $P(\text{確實為白球} | \text{二人都說是白球})$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10}}{\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{10}} = \frac{9}{10}。$$

10. 宴會在場的 50 位賓客有人偷了主人的珠寶，由於賓客身上都沒有珠寶，而且他們都不承認偷竊。警方決定動用測謊器，並且只問客人一個問題：「你有沒有偷珠寶？」。已知若某人說謊，則測謊器顯示他說謊的機率為 99%；若某人誠實，則測謊器顯示他誠實的機率是 90%。下列敘述何者正確？

- (1) 設竊賊只有一人。當賓客受測時，測謊器顯示賓客說謊的機率大於 10%。
- (2) 設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客正是竊賊的機率大於 50%。
- (3) 設竊賊只有一人。當測謊器顯示一賓客誠實時，該賓客卻是竊賊的機率小於 20%。
- (4) 當測謊器顯示一賓客說謊時，該賓客是竊賊的機率，並不因竊賊人數多少而改變。 【94 指甲】

Ans : (1)(3)

【詳解】

(A) ○：竊賊有 1 人，不是竊賊有 49 人，

$$\begin{aligned} P(\text{顯示說謊}) &= \frac{1}{50} \times \frac{99}{100} + \frac{49}{50} \times \frac{10}{100} \\ &= \frac{589}{5000} > \frac{10}{100} . \end{aligned}$$

(B) ✕： $P(\text{真竊賊} \mid \text{說謊})$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(\text{真竊賊})}{P(\text{說謊})} = \frac{\frac{1}{50} \times \frac{99}{100}}{\frac{1}{50} \times \frac{99}{100} + \frac{49}{50} \times \frac{10}{100}} \\ &= \frac{\frac{99}{5000}}{\frac{589}{5000}} = \frac{99}{589} < \frac{50}{100} . \end{aligned}$$

(C) ○： $P(\text{真竊賊} \mid \text{誠實})$

$$= \frac{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100}}{\frac{1}{50} \times \frac{1}{100} + \frac{49}{50} \times \frac{90}{100}} = \frac{1}{4411} < 0.2 .$$

(D) ✕： $\because$ 竊賊人數的多少，會改變是不是竊賊的機率。

11. 不透明箱內有編號分別為 1 至 9 的九個球，每次隨機取出一個，記錄其編號後放回箱內，以 $P(n)$ 表示前 n 次取球的編號之總和為偶數的機率。已知存在常數 r, s 使得 $P(n+1) = r + sP(n)$ 對任意正整數 n 都成立，求 r, s 。（化成最簡分數）。

【95 指甲】

Ans : $r = \frac{5}{9}, s = -\frac{1}{9}$

【詳解】

$$P(1) = \frac{4}{9},$$

$$P(2) = \frac{5}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{41}{81}.$$

$$P(3) = \left(\frac{4}{9}\right)^3 + 3 \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{364}{9^3}.$$

$$r + s \cdot \frac{4}{9} = \frac{41}{9^2} \Rightarrow 9^2 r + 4 \cdot 9s = 41 \dots\dots\dots (A)$$

$$r + s \cdot \frac{41}{81} = \frac{364}{9^3} \Rightarrow 9^3 r + 9 \cdot 41s = 364 \dots\dots\dots (B)$$

$$(A) \times 9 - (B) \Rightarrow s = -\frac{1}{9}, r = \frac{5}{9}.$$

12. 甲、乙、丙三人參加一投擲公正銅板的遊戲，每一局三人各擲銅板 1 次；在某局中，當有一人投擲結果與其他二人不同時，此人就出局且遊戲終止；否則就進入下一局，並依前述規則繼續進行，直到有人出局為止。試問下列哪些選項是正確的？

(1) 第一局甲就出局的機率是 $\frac{1}{3}$

(2) 第一局就有人出局的機率是 $\frac{1}{2}$

(3) 第三局才有人出局的機率是 $\frac{3}{64}$

(4) 已知到第十局才有人出局，則甲出局的機率是 $\frac{1}{3}$

(5) 該遊戲在終止前，至少玩了六局的機率大於 $\frac{1}{1000}$ 。【97 指甲】

Ans : (3)(4)

【詳解】

$S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$,
1 表正面, 0 表反面。

(1) 第一局甲就出局的機率是 $\frac{2}{2^3} = \frac{1}{8}$,

(2) 第一局就有人出局的機率是 $\frac{6}{2^3} = \frac{3}{4}$,

(3) 第三局才有人出局的機率是 $\frac{2}{8} \times \frac{2}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{3}{64}$,

(4) 已知到第十局才有人出局, 則甲出局的機率是 $\frac{1}{3}$,

(5) 該遊戲在終止前, 至少玩了六局的機率為

$$1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \frac{3}{4} \right) \\ = 1 - \frac{\frac{3}{4}(1 - (\frac{1}{4})^6)}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{4096}\right) = \frac{1}{4096} < \frac{1}{1000}。$$

13. 設 A, B, C 為三獨立事件, 且 $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B' \cap C) = \frac{1}{4}$,

$P(A \cap B' \cap C') = \frac{1}{12}$, 求下列各值:

(1) $P(B)$ 與 $P(C)$ 。

(2) $P(A|B' \cap C')$ 。

Ans : (1) $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{4}$, (2) $\frac{2}{3}$

【詳解】

(1) $P(A \cap B' \cap C) = P(A) \cdot P(B') \cdot P(C)$

$$= \frac{2}{3} \cdot P(B') \cdot P(C) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 8 \cdot P(B') \cdot P(C) = 3 \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 P(A \cap B' \cap C') &= P(A) \cdot P(B') \cdot P(C') \\
 &= \frac{2}{3} P(B') \cdot (1 - P(C)) = \frac{1}{12} \\
 \Rightarrow 8 \cdot P(B') \cdot (1 - P(C)) &= 1 \dots\dots\dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow \frac{P(C)}{1 - P(C)} = 3$$

$$\Rightarrow P(C) = 3 - 3 \cdot P(C) \Rightarrow P(C) = \frac{3}{4},$$

$$\text{代入} \textcircled{1} \Rightarrow P(B') = \frac{3}{8 \times \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}。$$

$$(2) \quad P(A|B' \cap C')$$

$$= \frac{P(A \cap B' \cap C')}{P(B' \cap C')} = \frac{P(A) \cdot P(B') \cdot P(C')}{P(B') \cdot P(C')}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}。$$

14. 某實驗室欲評估血液偵測老年癡呆症技術的誤判率（即偵測錯誤的機率）。共有 760 人接受此血液偵測技術實驗，實驗前已知樣本中有 735 人未患老年癡呆症。實驗後，血液偵測判斷為未患老年癡呆症者有 665 人，其中真正未患老年癡呆症有 660 人。試問此血液偵測技術的誤判率為何？ 【98 指乙】

Ans : $\frac{2}{19}$

【詳解】

實驗前 實驗後	未患病	有患病
	75	20
有患病	660	5
沒患病		

$$\text{故誤判率為 } \frac{75 + 5}{760} = \frac{80}{760} = \frac{2}{19}。$$

15. 某項 X 光透視檢查的可靠程度如下：患有結核病的人檢驗能正確判斷的可能性為 0.9 ；不患有結核病的人，則檢驗做了錯誤判斷的可能性為 0.01 。現在對某地區人口進行此項檢查，發現經 X 光透視檢查出有結核病者是真正結核病患者的機率為 $\frac{30}{113}$ ，求此地區結核病患者占全部人口的比率。

Ans : 0.4%

【詳解】

設此地區結核病患者占全部人口的比率為 k ，則

$$\frac{0.9k}{0.9k+0.01(1-k)} = \frac{30}{113}$$

$$\Rightarrow 30(0.9k + 0.01) = 113 \times 0.9k$$

$$\Rightarrow 30(89k + 1) = 113 \times 90k$$

$$\Rightarrow 89k + 1 = 339k$$

$$\Rightarrow k = 0.004。$$

16. 依據過去的經驗，小華對數學排列組合選擇題，10題會做6題，若有次考試有一個4選1的選擇題，小華會做就一定答對，小華不會做時會用猜的，結果小華答對，請問他是真正會答的機率是多少？

Ans : $\frac{6}{7}$

【詳解】

$$p = \frac{0.6}{0.6+0.4 \times 0.25} = \frac{6}{7}。$$

17. 甲、乙兩人以「剪刀、石頭、布」猜拳定勝負，連續猜拳3次，猜贏次數較多者勝。求可以分出勝負的機率為何？

Ans : $\frac{20}{27}$

【詳解】

不能分勝負者有：

(1) 三次均平手的機率為 $\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$ ，

(2) 一次甲贏，一次乙贏，一次平手 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3! = \frac{2}{9}$ ，

故可以分出勝負的機率為 $1 - \frac{1}{27} - \frac{2}{9} = \frac{20}{27}$ 。

18. 一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有三份，活動直到三份獎品都被抽中為止。則在排第四位的人可以抽獎的情況下，排第五位的人可以抽獎的條件機率為何？ 【99 指甲】

Ans : $\frac{11}{14}$

【詳解】

前三人中，沒人中獎，一人中獎，二人中獎，

P(第五位可抽獎/第四位可抽獎)

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 [1 + C_1^3 + C_2^3 \times \frac{1}{2}]}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 [1 + C_1^3 + C_2^3]} = \frac{\frac{11}{2}}{7} = \frac{11}{14}。$$