選修數學 上 進階講義

圓的參數式

大同高中·陳盈穎老師

信望愛文教基金會

16-2-2　圓的參數式

定理敘述

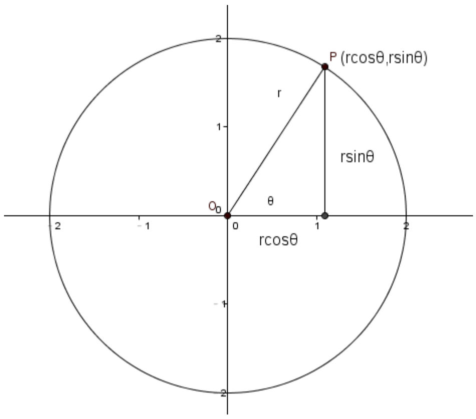
◆圓的參數

若圓的方程式 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ，

則圓的參數式為 $\begin{cases} x = r\cos\theta + h \\ y = r\sin\theta + k \end{cases}$ ，其中 0≦ θ ≦2 π

定理證明或說明

如圖，若圓心 O 為原點，P 為圓上一點，$\overline{OP}=r$ ，且 $\overline{OP}$ 與 X 軸正向夾角為 θ ，且 P 點坐標可表示為 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$



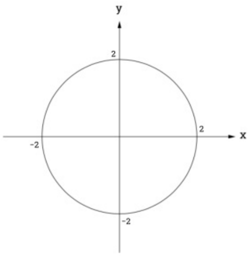
若圓的圓心為(h,k)，則圖形可視為將上圖平移(h,k)所得，故 P 點坐標可表示為 $(r\cos\theta+h, r\sin\theta+k)$

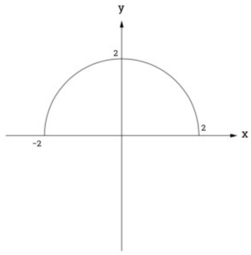
關鍵字

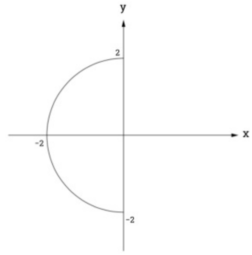
圓、參數式

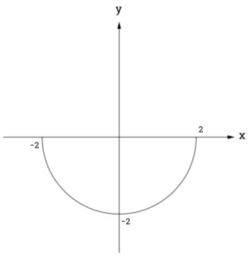
例題 1

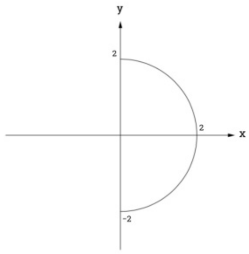
坐標平面上，參數式$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$ ，$\pi \le \theta \le 2\pi$ 所對應的曲線為下列何者？

(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


Ans：(4)

解：因為$\pi \le \theta \le 2\pi$ ，故選(4)

例題 2

已知坐標平面上一點 $A(5,3)$ ，B 為圓$C: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ 的動點，以$\overline{AB}$ 中點所成軌跡方程式為 $x^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ ，則$b + c + d + e + f =$ ________

Ans：3

解：圓$C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$ ，其參數式為$\begin{cases} x = 2\cos\theta + 1 \\ y = 2\sin\theta - 3 \end{cases}$，$0 \le \theta \le 2\pi$

設 $B(2\cos\theta + 1, 2\sin\theta - 3)$

得 $\overline{AB}$ 中點坐標為 $M(\cos\theta + 3, \sin\theta)$

其軌跡方程式為 $(x-3)^2 + y^2 = 1$ ，即 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$

故 $b + c + d + e + f = 0 + 1 + (-6) + 0 + 8 = 3$

例題 3

設 x， y 為實數且滿足 $x^2+y^2=4$ ，則

(1) $4x-3y+2$ 的最大值為________

(2) $x\cdot y$ 的最小值為________

Ans：(1)12；(2) -2

解：設 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta$

(1) $4x-3y+2=8\cos\theta-6\sin\theta+2=10\sin(\theta+\phi)+2$

故 $4x-3y+2$ 的最大值為 12

(2) $x\cdot y=(2\cos\theta)(2\sin\theta)=2\sin 2\theta$

故 $x\cdot y$ 的最小值為 -2

例題 4

已知圓 $C: x^2+y^2=25$ 、 $P(4,3)$ 及 $O(0,0)$ ，若 A 點為圓上一點，求 $\overline{OA}\cdot\overline{OP}$ 的最小值=______

Ans： -25

解：假設 $A(5\cos\theta, 5\sin\theta)$

$$\overline{OA}\cdot\overline{OP}=20\cos\theta+15\sin\theta=25\sin(\theta+\phi)$$

故所求最小值為 -25

例題 5

已知 $O(0,0)$ ， $A(4,3)$ ， P 為圓 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 上的動點，

則 ΔOAP 的最大面積為________ ，此時 P 點坐標為________

Ans：14 ； $(\frac{16}{5},-\frac{23}{5})$

解：假設 $P(2\cos\theta+2, 2\sin\theta-3)$

$$\Delta OAP\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2\cos\theta+2 & 2\sin\theta-3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

$$=|3\cos\theta-4\sin\theta+9|$$

$=|5\cos(\theta+\phi)+9|\le 14$，其中 $\cos\phi=\dfrac{3}{5}$、$\sin\phi=\dfrac{4}{5}$

故 ΔOAP 的最大面積為 14

此時 $\theta+\phi=2\pi$，所以 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$、$\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

故 P 點坐標為 $(\dfrac{16}{5},-\dfrac{23}{5})$

例題 6

設點 P 為圓 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=16$ 上之動點，且 $O(0,0)$，$\overline{OQ}=\dfrac{1}{2}\overline{OP}$，則動點 Q 的軌跡方程式為__________

Ans：$(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-1)^2=4$

解：假設 $P(4\cos\theta+1,4\sin\theta+2)$

$\overline{OQ}=\dfrac{1}{2}\overline{OP}=(2\cos\theta+\dfrac{1}{2},2\sin\theta+1)$

得 Q $(2\cos\theta+\dfrac{1}{2},2\sin\theta+1)$

故所求軌跡方程式為 $(x-\dfrac{1}{2})^2+(y-1)^2=4$

溫故知新

習題 1

坐標平面上，參數式 $\begin{cases}x=2\cos x\\ y=2\sin x\end{cases}$，$\dfrac{\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{7\pi}{6}$ 為一曲線，試問此曲線長度為________

習題 2

設 Q 是圓 $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ 上的動點，若 $P(2,1)$ 為圓外一點，則 $\overline{PQ}$ 中點所形成的軌跡方程式為________

習題 3

設 x，y 為實數且滿足 $(x-1)^2+(y+1)^2=4$，則 $x+y$ 的最大值為________

習題 4

設圓 $x^2+y^2=9$，$P(5,5)$ 為圓外一點，則 P 點與圓的最短距離為________

習題 5

已知 $P(x,y)$ 為圓 $(x-2)^2+(y+3)^2=1$ 上的動點，求 $|3x-4y|$ 的最大值為________

習題 6

已知 $O(0,0)$，$A(4,3)$，P 為圓 $x^2+y^2=1$ 上的動點，則 ΔOAP 的最大面積為________，此時 P 點坐標為________

習題 7 【學測補 92】

設 (a,b) 為二次曲線 $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ 上的點，則 a^2+b^2-2b 的最大值為

解答與解析

習題 1：$\frac{5}{3}\pi$

習題 2：$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

習題 3：$2\sqrt{2}$

習題 4：$5\sqrt{2}-3$

習題 5：23

習題 6：$\frac{5}{2}$；$(\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$

習題 7：15

解：(a,b) 帶入方程式得 $a^2+b^2-6a-2b+9=0$

$$x^2+y^2-6x-2y+9=0 \Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=1$$

假設 $a=\cos\theta+3, b=\sin\theta+1$

$a^2+b^2-2b=6a-9=6\cos\theta+9\le 6+9=15$

故所求為15