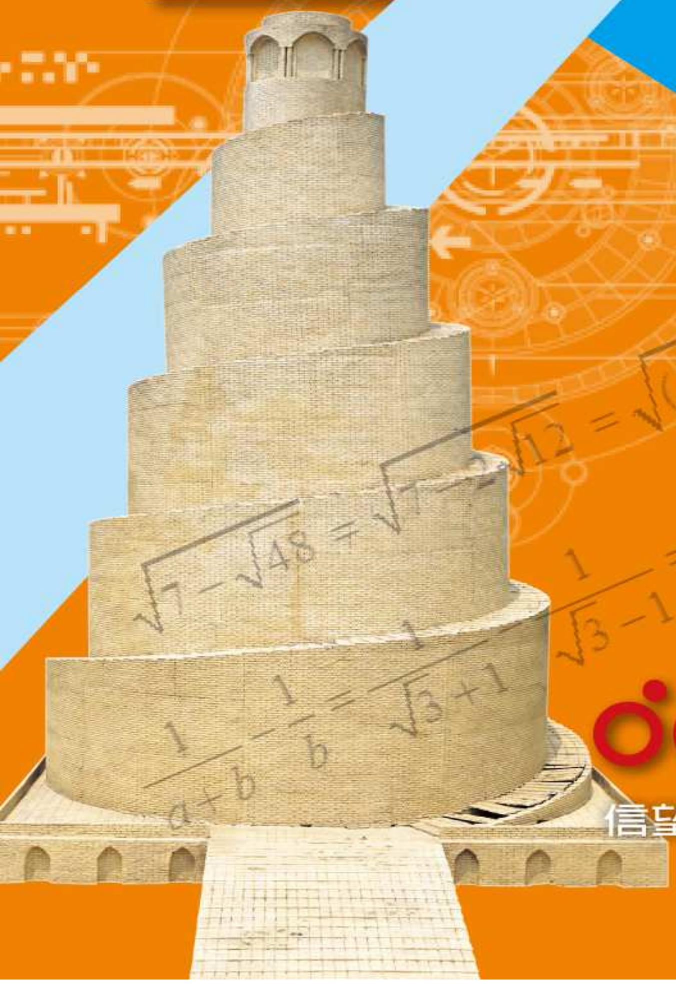
高中數學 進階講義

空間中的直線

陳清海 老師

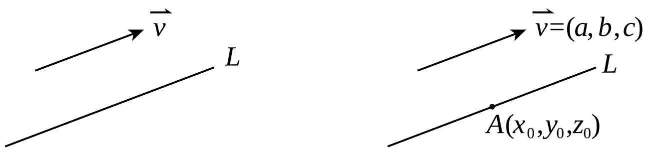


信望愛文教基金會

ok422 空間中的直線

主題一直線方程式

1. 方向向量及其性質：在空間中，當非零向量 $\overrightarrow{v}$ 與直線 L 平行時，我們稱 $\overrightarrow{v}$ 為直線 L 的一個方向向量，如右圖所示．方向向量具有一個重要性質：直線 L 的方向向量並不是唯一的，但是這些方向向量都互相平行．



2. 直線參數式：

   通過點 $A(x_0,y_0,z_0)$，且以非零向量 $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$ 為方向向量之直線 L 的參數式為 $L:\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$（$t$ 為實數）．

3. 直線對稱比例式：

   通過點 $A(x_0,y_0,z_0)$，且方向向量為 $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$（其中 $abc\neq 0$）之直線 L 的對稱比例式為 $L:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ ．

4. 直線二面式：

   若兩平面 $E_1:a_1x+b_1y+c_1z=d_1$， $E_2:a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ 相交於直線 L，則 L 的二面式為 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \end{cases}$ ．

【例題 1】

(1) 求通過 $A(1，0，-2)$，且以 $\overrightarrow{v}=(2,-1,3)$為方向向量之直線的參數式．

(2) 求通過 $A(2，1，1)$，$B(3，2，-2)$兩點之直線的參數式．

Ans：(1) $\begin{cases} x=1+2t \\ y=0-t \\ z=-2+3t \end{cases}$ （t 為實數），(2) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=1-3t \end{cases}$ （t 為實數）

【詳解】

(1) 直線的參數式為$\begin{cases} x=1+2t \\ y=0-t \\ z=-2+3t \end{cases}$ （t 為實數）．

(2) 因為直線通過點 $A(2，1，1)$，

且向量 $\overrightarrow{AB}=(1,1,-3)$是它的一個方向向量，

所以直線的參數式為$\begin{cases} x=2+1t \\ y=1+1t \\ z=1-3t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

【類題 1】

設通過 $A(2，1，-3)$，$B(3，3，0)$兩點的直線為 L．

(1) 求 L 的參數式．

(2) 已知點 $C(-1，h，k)$在 L 上，求 h，k 的值．

Ans：(1) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-3+3t \end{cases}$ （t 為實數），(2) h＝−5，k＝−12

【詳解】

(1) 因為直線通過點 $A(2，1，-3)$，

且向量 $\overrightarrow{AB}=(1,2,3)$是它的一個方向向量，

所以直線 L的參數式為$\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-3+3t \end{cases}$ （t 為實數）．

(2) 因為點 $C(-1，h，k)$在 L 上，

所以將 $C(-1，h，k)$代入 $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=-3+3t \end{cases}$，得 $\begin{cases} -1=2+t \\ h=1+2t \\ k=-3+3t \end{cases}$，

解得 $t=-3$，$h=-5$，$k=-12$．

【例題 2】

(1) 求通過 $A(1，3，-2)$，$B(3，1，-3)$兩點之直線的對稱比例式．

(2) 求直線 $\frac{x-1}{1}=\frac{4-y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ 的參數式．

Ans：(1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{-1}$，(2) $\begin{cases} x=1+t \\ y=4-2t \\ z=-1-t \end{cases}$（$t$ 為實數）

【詳解】

(1) 因為直線通過點 $A(1，3，-2)$，

且向量 $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)$是它的一個方向向量，

所以直線的對稱比例式為 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{-1}$．

(2) 將對稱比例式 $\frac{x-1}{1}=\frac{4-y}{2}=\frac{z+1}{-1}$

改寫成 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-(-1)}{-1}$，

可知直線通過點$(1，4，-1)$，

且$(1，-2，-1)$是它的一個方向向量，

因此直線的參數式為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=4-2t \\ z=-1-t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

【類題 2】

(1) 已知通過 $A(3，0，-2)$與 $B(2，2，-1)$兩點之直線的對稱比例式為

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z}{4}$**，求 a，b，x_0，y_0 的值．**

(2) 求直線 $\begin{cases}x=1+t\\ y=-3+2t\\ z=2-3t\end{cases}$**（$t$ 為實數）的對稱比例式．**

Ans：(1) $a=-4$，$b=8$，$x_0=1$，$y_0=4$，(2) $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$

【詳解】

(1) 因為直線的方向向量$(a，b，4)$與 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,1)$ 平行，

所以 $\dfrac{a}{-1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{4}{1}$，解得 $a=-4$，$b=8$．

又因為 $A(3，0，-2)$為直線 $\dfrac{x-x_0}{-4}=\dfrac{y-y_0}{8}=\dfrac{z}{4}$ 上一點，

代入得 $\dfrac{3-x_0}{-4}=\dfrac{0-y_0}{8}=\dfrac{-2}{4}$，

解得 $x_0=1$，$y_0=4$．

故 $a=-4$，$b=8$，$x_0=1$，$y_0=4$．

(2) 由參數式 $\begin{cases}x=1+t\\ y=-3+2t\\ z=2-3t\end{cases}$（$t$ 為實數）可得直線通過點$(1，-3，2)$，

且$(1，2，-3)$是直線的一個方向向量．

因此直線的對稱比例式可以表示為 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-2}{-3}$．

【例題 3】

求兩平面 $x+2y+3z=4$ 和 $2x-y+z=3$ 之交線 L 的參數式．

Ans：$\begin{cases}x=2-t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$（$t$ 為實數）

【詳解】

設點 $P(x,y,z)$在交線 L 上，即 $\begin{cases}x+2y+3z=4\\ 2x-y+z=3\end{cases}$．

令 $z=t$，整理得 $\begin{cases} x+2y=4-3t\cdots\cdots(1) \\ 2x-y=3-t\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$，

由①+②×2 消去 y，得 5x＝10－5t，解得 x＝2－t，

再將此式代入②，得 4－2t－y＝3－t，解得 y＝1－t．

因此 P 點的坐標為(2－t,，1－t，t)，

即交線 L 的參數式為 L：$\begin{cases} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$，（$t$ 為實數）．

【類題 3】

求兩平面 $3x+2y-2z=1$ 和 $2x+3y+2z=-1$ 之交線 L 的參數式．

Ans：$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-2t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為實數）

【詳解】

設點 $P(x，y，z)$在交線 L 上，即 $\begin{cases} 3x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=-1 \end{cases}$．

令 z＝t，整理得 $\begin{cases} 3x+2y=1+2t & ① \\ 2x+3y=-1-2t & ② \end{cases}$，

由①×3－②×2 消去 y，得 5x＝5＋10t，解得 x＝1＋2t，

再將此式代入②，得 $2+4t+3y=-1-2t$，解得 $y=-1-2t$．

因此 P 點的坐標為(1＋2t，−1－2t，t)，即交線 L 的參數式為

$L:\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-2t \\ z=t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

【例題 4】

求直線 $L:\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x-y+2z=3 \end{cases}$的一個方向向量．

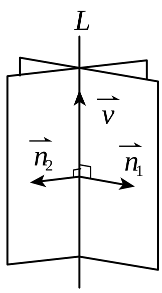
Ans：(1，−5，−4)

【詳解】

因為直線 L的方向向量與兩平面

$x+y-z=2$，$3x-y+2z=3$的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{n_2}=(3,-1,2)$均垂直，



所以 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(1,-5,-4)$ 即為直線 L 的一個方向向量．

【類題 4】

已知直線 $L:\begin{cases}3x-y-5z=0\\2x+3y-7z=2\end{cases}$ **的參數式為** $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ **（t 為實數），求 b，c，z_0 的值．**

Ans：$b=1$，$c=1$，$z_0=1$

【詳解】

因為 L 的方向向量為 $\overrightarrow{v}=(2,b,c)$，

與兩平面 $3x-y-5z=0$，$2x+3y-7z=2$ 的法向量

$\overrightarrow{n_1}=(3,-1,-5)$，$\overrightarrow{n_2}=(2,3,-7)$ 均垂直，所以 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}$ 平行．

計算 $\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=11(2,1,1)$，由 $\dfrac{2}{2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{c}{1}$，可得 $b=1$，$c=1$．

又因為直線 L 通過點 $(2，1，z_0)$，

所以點 $(2，1，z_0)$ 在平面 $3x-y-5z=0$ 上，

代入得 $5-5z_0=0$，解得 $z_0=1$．

故 $b=1$，$c=1$，$z_0=1$．

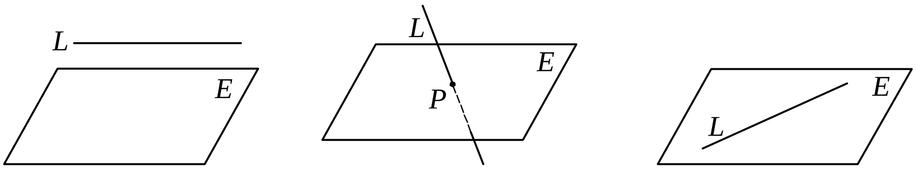
主題二、直線和平面的關係

將直線 L 的參數式代入平面 E 的方程式，解參數 t（即求交點）.

(1) 若 t 無解，則 L 和 E 沒有交點，故 L 和 E 平行 .

(2) 若 t 恰有一解，則 L 和 E 恰交於一點 .

(3) 若 t 有無限多解，則 L 上的點均落在 E 上，故 L 落在 E 上 .



(1) L 與 E 平行　(2) L 與 E 恰交於一點 P　(3) L 落在 E 上

【例題 5】

討論直線 $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{2}$ **與三個平面**

E_1：$x+2y-z=4$，E_2：$x+4y+z=-2$，E_3：$x+4y+z=1$ **的相交情形．**

Ans：L 與 E_1 交於一點$(-2，1，-4)$；L 落在 E_2 上；L 與 E_3 平行

【詳解】

由題意可知：直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1-t \\ z=2t \end{cases}$（$t$ 為實數）．

(1) 將直線 L 的參數式代入 E_1：$x+2y-z=4$，
得 $-2t=4$，解得 $t=-2$．
故 L 與 E_1 交於一點，且其交點為$(-2，1，-4)$．

(2) 將直線 L 的參數式代入 E_2：$x+4y+z=-2$，
得 $-2=-2$，解得 t 為任意實數．
故 L 上任一點均在 E_2 上，即 L 落在 E_2 上．

(3) 將直線 L 的參數式代入 E_3：$x+4y+z=1$，
得 $-2=1$（不合），即 t 沒有實數解．
故 L 上任一點均不在平面 E_3 上，即 L 與 E_3 平行．

【類題 5-1】

求直線 $L:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ **與平面** E：$x+2y-z=6$ **的交點坐標．**

Ans：$(1，7，9)$

【詳解】

因為直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=3t \end{cases}$（$t$ 為實數），

所以代入 E：$x+2y-z=6$ 得 $2t=6$，解得 $t=3$．

故 L 與 E 的交點為$(1，7，9)$．

【類題 5-2】

設直線 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$ **落在平面** E：$ax-y+bz=5$ **上，求實數** a，b **的值．**

Ans：$a=3$，$b=2$

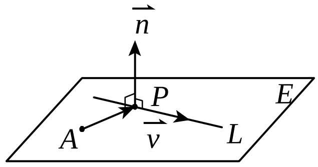
【詳解】
設直線 L 與平面 E 的交點為$(2+3t，5+t，2-4t)$．
因為交點在 E 上，所以代入 E，得
$a(2+3t)-(5+t)+b(2-4t)=5$，
整理得$(3a-4b-1)t=-2a-2b+10$．
因為 L 落在 E 上，所以有無限多個交點，
即上式中 t 有無限多解，
因此 $\begin{cases}3a-4b-1=0\\-2a-2b+10=0\end{cases}$，解得 $a=3$，$b=2$．

【例題 6】

求通過點 $A(1，3，4)$，且包含直線 $L:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$ 之平面 E 的方程式．

Ans：$x-2y+2z=3$

【詳解】
由的對稱比例式可知：L 通過點 $P(-1,-1,1)$，



且 $\overrightarrow{v}=(4,-1,-3)$ 是 L 的一個方向向量．

因為 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{AP}=(-2,-4,-3)$ 均在 E 上，如右圖所示，

所以令 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{AP}$，可得

$\overrightarrow{n}=(4，-1，-3)\times(-2，-4，-3)$

$=(-9，18，-18)=(-9)(1，-2，2)$，
即$(1，-2，2)$是 E 的一個法向量，
因此可設 E 的方程式為 $x-2y+2z=d$．
又因為 E 通過點 $A(1，3，4)$，
將其代入方程式得 $d=1\times1-2\times3+2\times4=3$，
故 E 的方程式為 $x-2y+2z=3$．

【類題 6】

求通過原點 O，且包含直線 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$ 之平面 E 的方程式．

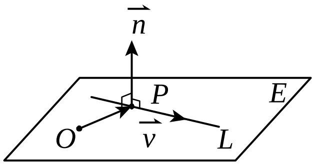
Ans：$x+y-z=0$

【詳解】

由 L 的對稱比例式可知：L 通過點 $P(1，2，3)$，

且 $\overrightarrow{v}=(2,1,3)$ 是 L 的一個方向向量．

因為 $\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{OP}=(1,2,3)$ 均在 E 上，如下圖所示，



所以令 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{OP}$，可得

$\overrightarrow{n}=(2，1，3)\times(1，2，3)$

$=(-3，-3，3)=(-3)(1，1，-1)$，

即$(1，1，-1)$是 E 的一個法向量，

因此可設 E 的方程式為 $x+y-z=d$，

又因為 E 通過原點$(0，0，0)$，

將其代入方程式得 $d=0$，

故 E 的方程式為 $x+y-z=0$．

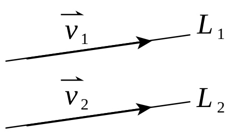
主題三、直線與直線的關係

空間中兩直線的關係分別為：平行、重合、交於一點或歪斜．

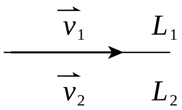
利用直線的方向向量可以將兩直線的相交情形，分成以下 2 類，

每一類可利用將直線方程式聯立求交點的方法，判別兩直線的關係

方向向量平行

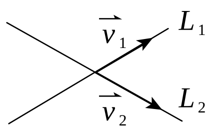


L_1與L_2平行

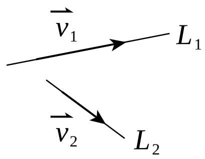


L_1與L_2重合

方向向量不平行



L_1與L_2交於一點



L_1與L_2歪斜

【例題 7】

求直線 $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ **與兩直線** $L_1:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ **，**

$L_2:\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$ **的相交情形．**

Ans：L 與 L_1 平行；L 與 L_2 重合

【詳解】

因為 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(2,2,1)$ 與 L_1，L_2 的方向向量

$\overrightarrow{v_1}=(-2,-2,-1)$，$\overrightarrow{v_2}=(4,4,2)$ 都平行，

所以 L 與 L_1，L_2 不是平行就是重合．
由 L 的對稱比例式可知(1,0,2)是 L 上一點，
接下來檢查點(1，0，2)是否在直線 L_1 或 L_2 上，
如果是，代表該直線與 L 重合，
如果不是，代表該直線與 L 平行．

(1) 將點(1，0，2)代入 $L_1:\frac{x-3}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-1}$，

得 $\frac{-2}{-2}=\frac{-1}{-2}=\frac{3}{-1}$（不合），
可知點(1，0，2)不在 L_1 上，
故直線 L 與 L_1 平行．

(2) 將點(1，0，2)代入 $L_2:\frac{x+1}{4}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{2}$，

得 $\frac{2}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$（成立），
可知點(1，0，2)在 L_2 上，
故直線 L 與 L_2 重合．

【類題 7】

已知直線 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-2}$ **與** $L_2:\frac{x+1}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{4}$ **重合，求** a，b，y_0，z_0 **的值．**

Ans：$a=-2$，$b=2$，$y_0=1$，$z_0=4$

【詳解】
因為 L_1 與 L_2 重合，

所以兩直線 L_1 與 L_2 的方向向量

$\overrightarrow{v_1}=(1,-1,-2)$ 與 $\overrightarrow{v_2}=(a,b,4)$ 平行，

即 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{4}{-2}$，解得 $a=-2$，$b=2$．

又因為 L_1 與 L_2 重合，所以 L_1 上的點$(1，-1，0)$在 L_2 上，

因此將$(1，-1，0)$代入 $L_2:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-y_0}{2}=\dfrac{z-z_0}{4}$，

得 $\dfrac{1+1}{-2}=\dfrac{(-1)-y_0}{2}=\dfrac{0-z_0}{4}$，解得 $y_0=1$，$z_0=4$．

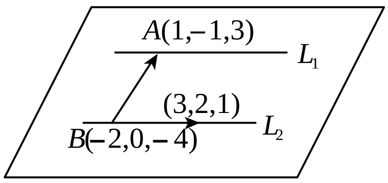
故 $a=-2$，$b=2$，$y_0=1$，$z_0=4$．

【例題 8】

求包含兩平行線 $L_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ 與 $L_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{1}$ 的平面方程式．

Ans：$5x-6y-3z=2$

【詳解】



設包含兩直線之平面的法向量為 $\overrightarrow{n}$．

因為平面包含直線 L_1 與直線 L_2，

所以 $\overrightarrow{n}\perp(3,2,1)$．

由直線 L_1，L_2 的參數式得知，

點 $A(1，-1，3)$，點 $B(-2，0，-4)$分別在直線 L_1，L_2 上，

又因為點 A，B 均在平面上，所以 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BA}=(3,-1,7)$，

得 $\overrightarrow{n}$ 與$(3，2，1)\times(3，-1，7)$

$=(15，-18，-9)=3(5，-6，-3)$平行，

因此可設平面的方程式為 $5x-6y-3z=k$．

因為平面包含點 $A(1，-1，3)$，

所以代入方程式，得 $k=2$，

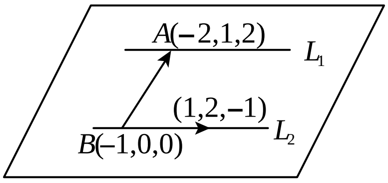
故平面方程式為 $5x-6y-3z=2$．

【類題 8】

求包含兩平行線 $L_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 與 $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 的平面方程式．

Ans：$5x-y+3z=-5$

【詳解】



設包含兩直線的平面法向量為 $\overrightarrow{n}$ ．

因為平面包含直線 L_1 與直線 L_2，所以 $\overrightarrow{n}\perp(1,2,-1)$ ．

由直線 L_1，L_2 的參數式得知，

點 $A(-2，1，2)$，點 $B(-1，0，0)$分別在直線 L_1，L_2 上，

又因為點 A，B 均在平面上，所以 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{BA}=(-1,1,2)$，

得 $\overrightarrow{n}$ 與$(1，2，-1)\times(-1，1，2)=(5，-1，3)$平行，

因此可設平面的方程式為 $5x-y+3z=k$ ．

因為平面包含點 $B(-1，0，0)$，

所以代入方程式，得 $k=-5$，

故平面方程式為 $5x-y+3z=-5$ ．

【例題 9】

求直線 $L:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$ 與兩直線 $L_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{1}$，

$L_2:\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ 的相交情形．

Ans：L 與 L_1 交於一點$(0，1，1)$；L 與 L_2 歪斜

【詳解】

因為 L 的方向向量 $\overrightarrow{v}=(2,1,-1)$

與 L_1，L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(3,2,1)$， $\overrightarrow{v_2}=(1,3,-1)$ 都不平行，

所以 L 與 L_1，L_2 不是交於一點就是歪斜．

由三直線的對稱比例式可得它們的參數式分別為：

$$L:\begin{cases}x=2+2t\\ y=2+t\\ z=-t\end{cases}\quad（t\text{ 為實數}），$$

$$L_1:\begin{cases}x=3+3s\\y=3+2s\\z=2+s\end{cases}（\ s\text{ 為實數}），$$

$$L_2:\begin{cases}x=5+r\\y=1+3r\\z=1-r\end{cases}（\ r\text{ 為實數}）.$$

接下來檢查 L 與 L_1，L_2 是否有交點，
如果有交點，代表該直線與 L 交於一點，
如果沒有交點，代表該直線與 L 歪斜．

(1) 設 L 與 L_1 的交點為 $P(x，y，z)$，
因為點 P 既在 L 上也在 L_1 上，
所以可列得 $\begin{cases}2+2t=3+3s\\2+t=3+2s\\-t=2+s\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}2t-3s=1 & ①\\t-2s=1 & ②\\-t-s=2 & ③\end{cases}$，
由①，②解得 $t=-1$，$s=-1$，代入③也滿足，
可得 L 與 L_1 交於一點，且其交點為 $(0，1，1)$．

(2) 設 L 與 L_2 的交點為 $P(x，y，z)$，
因為點 P 既在 L 上也在 L_2 上，
所以可列得 $\begin{cases}2+2t=5+r\\2+t=1+3r\\-t=1-r\end{cases}$，整理得 $\begin{cases}2t-r=3 & ①\\t-3r=-1 & ②\\-t+r=1 & ③\end{cases}$，
由①，②解得 $t=2$，$r=1$，代入③得 $-1=1$（不合），
故 L 與 L_2 沒有交點，即 L 與 L_2 歪斜．

【類題 9】

求兩直線 $L_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+5}{2}$ 與 $L_2:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 的交點坐標．

Ans：$(0，0，-1)$

【詳解】
由兩直線的對稱比例式可得它們的參數式分別為：

$$L_1:\begin{cases}x=-2+t\\y=2-t\\z=-5+2t\end{cases}（\ t\text{ 為實數}），\qquad L_2:\begin{cases}x=2+2s\\y=1+s\\z=-2-s\end{cases}（\ s\text{ 為實數}）.$$

設 L_1 與 L_2 的交點為 $P(x，y，z)$，
因為點 P 既在 L_1 上也在 L_2 上，

所以可列得 $\begin{cases} -2+t=2+2s \\ 2-t=1+s \\ -5+2t=-2-s \end{cases}$，整理得 $\begin{cases} t-2s=4 & ① \\ -t-s=-1 & ② \\ 2t+s=3 & ③ \end{cases}$，

由①，②解得 $t=2$，$s=-1$，代入③也滿足，

可得 L_1 與 L_2 的交點為$(0，0，-1)$．

【例題 10】

已知兩直線 $L_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 與 $L_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ 相交於一點，

求包含 L_1 與 L_2 之平面 E 的方程式．

Ans：$x-5y-3z=0$

【詳解】

因為兩直線 L_1，L_2 的方向向量

$\overrightarrow{v_1}=(2,1,-1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,-1,2)$ 均在平面 E 上，

所以 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(1,-5,-3)$ 是 E 的一個法向量，

因此可設 E 的方程式為 $x-5y-3z=d$．

又因為 E 通過 L_1 上一點$(1，-1，2)$，

將其代入方程式得

$d=1\cdot1-5\cdot(-1)-3\cdot2=0$，

故 E 的方程式為 $x-5y-3z=0$．

【類題 10】

已知兩直線 $L_1: \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{2}$ 與 $L_2: \frac{x+2}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-1}{k}$ 交於一點 P，求

(1) 實數 k 的值．

(2) 交點 P 的坐標．

(3) 設兩直線的交角為 θ，求 $\sin\theta$ 的值．

(4) 包含 L_1 與 L_2 的平面方程式．

Ans：(1) -2，(2) $(0，-3，-1)$，(3) $\frac{\sqrt{65}}{9}$，(4) $6x-2y+5z=1$

【詳解】

(1) 利用直線 L_2 的參數式，

可設直線 L_1 與直線 L_2 之交點的坐標為

$(-2+2t，-4+t，1+kt)$，t 為實數．

因為 P 同時也在 L_1 上，所以代入 L_1 的方程式得

$$\frac{(-2+2t)+2}{-1}=\frac{(-4+t)-1}{2}=\frac{(1+kt)-3}{2},$$

整理得 $\dfrac{2t}{-1}=\dfrac{-5+t}{2}=\dfrac{-2+kt}{2}$，

解得 $t=1$，$k=-2$．

(2) 由(1)得知，交點 P 的坐標為$(0，-3，-1)$．

(3) 因為兩直線的交角 θ 恰為兩直線方向向量的夾角，

所以利用向量內積的定義，得

$$\cos\theta=\pm\frac{(-1,2,2)\cdot(2,1,-2)}{3\times3}=\pm\frac{4}{9},$$

因此

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{65}}{9}.$$

(4) 設包含兩直線之平面的法向量為 $\overrightarrow{n}$．

因為平面包含直線 L_1 與直線 L_2，

所以 $\overrightarrow{n}\perp L_1$，$\overrightarrow{n}\perp L_2$，

即 $\overrightarrow{n}$ 與

$(-1，2，2)\times(2，1，-2)$

$=(-6，2，-5)$

$=(-1)(6，-2，5)$平行，

因此可設平面方程式為 $6x-2y+5z=d$，

又平面包含交點 $P(0，-3，-1)$，代入得 $d=1$．

故包含 L_1 與 L_2 的平面方程式為 $6x-2y+5z=1$．

【例題 11】

演唱會需要投射兩道雷射燈光在舞臺處交會．現設定空間坐標，一道雷射燈光由點(2，1，2)朝向點(3，3，3)發射，另一道燈光則由點(3，2，k)沿著平行於 y 軸的方向發射，試問：當 k 為何值時，兩道燈光會相交？又其相交的坐標為何？

Ans：$k=3$，相交坐標 $(3,3,3)$

【詳解】

一道雷射燈光由點(2,1,2)朝向點(3,3,3)發射，

其方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$，

因此燈光行走之路徑所在的直線

參數式為 $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+2t \\ z=2+t \end{cases}$（$t$ 為實數）；

另一道雷射燈光由點$(3,2,k)$沿著平行於 y 軸的方向發射，

其方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(0,1,0)$，

因此燈光行走之路徑所在的直線

參數式為 $\begin{cases} x=3 \\ y=2+s \\ z=k \end{cases}$（$s$ 為實數）．

因為兩道燈光於舞臺處相交，

所以相交的坐標滿足 $\begin{cases} 2+t=3 \\ 1+2t=2+s \\ 2+t=k \end{cases}$，

解得 t＝1， s＝1， k＝3．

故當 k＝3 時， 兩道燈光在舞臺處相交，

且其交點的坐標為(3，3，3)．

【類題 11】

李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從 $(0,0,2)$ 朝向 $(5,8,3)$ 發射一固定雷射光束，接著又從點 $(0,7,a)$ 沿平行於 x 軸方向發射另一雷射光束，試問當 a 為何值時，兩雷射光束會相交？　　　【93 指乙】

Ans：$\dfrac{23}{8}$

【詳解】

一道雷射光束由(0，0，2)朝向(5，8，3)發射，

其路徑的直線參數式為 $\begin{cases} x=5s \\ y=8s \\ z=2+s \end{cases}$（s 為實數）；

另一道由點(0，7，a)沿平行於 x 軸方向發射，

其路徑的直線參數式為 $\begin{cases} x=0+t \\ y=7 \\ z=a \end{cases}$ （t 為實數）．

因為兩雷射光束相交，所以 $\begin{cases} 5s=0+t \\ 8s=7 \\ 2+s=a \end{cases}$，

解得 $s=\dfrac{7}{8}$， $t=\dfrac{35}{8}$， $a=\dfrac{23}{8}$ ．

因此當 $a=\dfrac{23}{8}$ 時，兩雷射光束交會於點 $\left(\dfrac{35}{8},7,\dfrac{23}{8}\right)$ ．

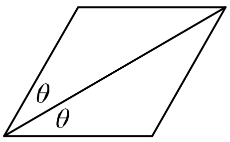
【例題 12】

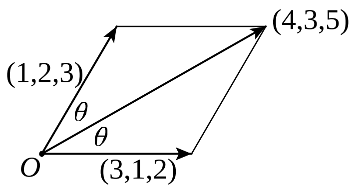
已知兩直線 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 與 $L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$ 交於一點，求此兩直線的角平分線方程式．

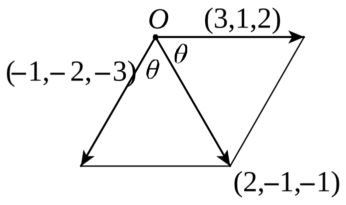
Ans： $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}$ 與 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

【詳解】

由直線方程式可知： L_1 與 L_2 交於原點．
因為菱形的對角線將角平分，如下圖所示，
所以我們可以利用此性質求角平分線的方向向量．
因為 L_1， L_2 的方向向量(1，2，3)與(3，1，2)等長，
所以我們可以利用
(1，2，3)＋(3，1，2)＝(4，3，5)
與(3，1，2)－(1，2，3)＝(2，−1，−1)
得到 L_1， L_2 之角平分線的方向向量．







因此由圖可知：

兩角平分線方程式為 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{5}$ 與 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$ ．

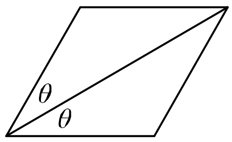
【類題 12】

已知兩直線 L₁：$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$與 L₂：$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$交於一點，

求此兩直線的角平分線方程式．

Ans：$\frac{x}{13}=\frac{y}{23}=\frac{z}{32}$與$\frac{x}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-4}$

【詳解】



由直線方程式可知：L_1與L_2交於原點．

因為菱形的對角線將角平分，如下圖所示，

所以我們可以利用此性質求角平分線的方向向量．

因為L_1，L_2的方向向量(1，2，2)與(2，3，6)

的長度分別為 3，7，並不等長，

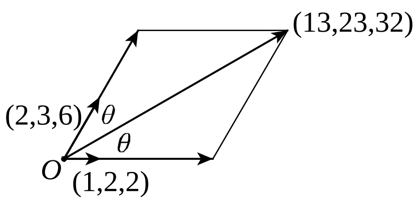
所以我們可以先將方向向量的長度調整成一樣，均改成 21，

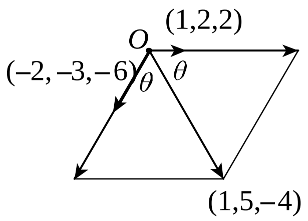
即取為 7(1，2，2)＝(7，14，14)與 3(2，3，6)＝(6，9，18)，

而後由(7，14，14)＋(6，9，18)＝(13，23，32)

與(7，14，14)－(6，9，18)＝(1，5，−4)

得到L_1，L_2之角平分線的方向向量．





因此由圖可知：

兩角平分線方程式為$\frac{x}{13}=\frac{y}{23}=\frac{z}{32}$與$\frac{x}{1}=\frac{y}{5}=\frac{z}{-4}$．

【例題 13】

已知點 $P(1，0，1)$，直線 L：$\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{2}$，且自 P 點作直線 L 的

垂線與直線 L 交於 A 點，求

(1) A 點的坐標．

(2) 點 P 到直線 L 的距離．

Ans：(1) (3，2，−3)，(2) $2\sqrt{6}$

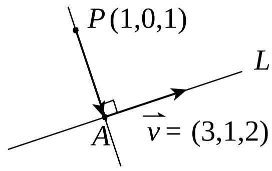
【詳解】

從點 $P(1，0，1)$作 L 的垂線 PA 與 L 交於 A 點，

如右圖所示．

由 L 的對稱比例式，可令 A 點的坐標為

$(3t$，$1+t$，$-5+2t)$，t 為實數，



並得 $\overrightarrow{PA}=(-1+3t$，$1+t$，$-6+2t)$．

因為 $\overrightarrow{PA}\perp L$，所以 $\overrightarrow{PA}$ 和 L 的方向向量 $(3$，1，$2)$ 垂直，

即 $(-1+3t$，$1+t$，$-6+2t)\cdot(3$，1，$2)=0$，

整理得 $14t-14=0$，解得 $t=1$．因此

(1) A 點的坐標為 $(3$，2，$-3)$．

(2) $\overrightarrow{PA}=(2,2,-4)$，故點 P 到直線 L 的距離為

$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}=2\sqrt{6}$．

【類題 13】

已知點 $P(1$，1，$-2)$，直線 L：$\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-6}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$，且 Q 點是點 P 對直線 L 的對稱點，求 Q 點的坐標．

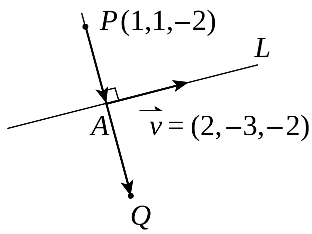
Ans：$(13$，5，$4)$

【詳解】

從點 $P(1$，1，$-2)$ 作 L 的垂線 PA 與 L 交於 A 點．

由 L 的對稱比例式，

可令 A 點坐標為 $(5+2t$，$6-3t$，$3-2t)$，t 為實數，



並得 $\overrightarrow{PA}=(4+2t,5-3t,5-2t)$．

因為 $\overrightarrow{PA}\perp L$，所以 $\overrightarrow{PA}$ 和 L 的方向向量 $(2$，-3，$-2)$ 垂直，

即 $(4+2t$，$5-3t$，$5-2t)\cdot(2$，-3，$-2)=0$，

解得 $t=1$，並得 A 點的坐標為 $(7$，3，$1)$，$\overrightarrow{PA}=(6,2,3)$．

設點 P 對直線 L 的對稱點 Q 的坐標為 $(x$，y，$z)$，

因為 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{PA}$，所以 $(x-7$，$y-3$，$z-1)=(6$，2，$3)$，

解得 $x=13$，$y=5$，$z=4$．

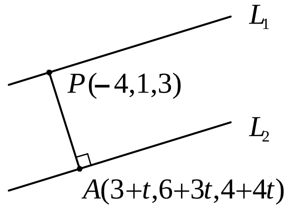
故 Q 點的坐標為 $(13$，5，$4)$．

【例題 14】

求兩平行線 $L_1:\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ 和 $L_2:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-6}{3}=\dfrac{z-4}{4}$ 的距離．

Ans：7

【詳解】



如下圖，在直線 L_1 上取一點 $P(-4，1，3)$，
此時兩平行線 L_1 與 L_2 的距離就是 P 點到 L_2 的距離．
從點 P 作直線 PA 垂直 L_2 於 A 點，由 L_2 的對稱比例式，
可設 A 點的坐標為$(3+t，6+3t，4+4t)$，t 為實數，

並得 $\overrightarrow{PA}=(7+t，5+3t，1+4t)$．

因為 $\overrightarrow{PA}\perp L_2$，所以 $\overrightarrow{PA}$ 和 L_2 的方向向量$(1，3，4)$垂直，

即$(7+t，5+3t，1+4t)\cdot(1，3，4)=0$，解得 $t=-1$，

並得 $\overrightarrow{PA}=(6,2,-3)$．

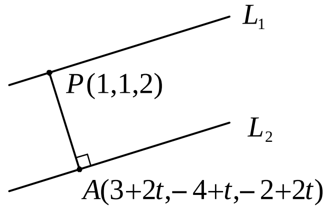
故兩平行線 L_1 與 L_2 的距離為 $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{6^2+2^2+(-3)^2}=7$．

【類題 14】

求兩平行線 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 和 $L_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ 的距離．

Ans：6

【詳解】



如右圖，在直線 L_1 上取一點 $P(1，1，2)$，
此時兩平行線 L_1 與 L_2 的距離就是 P 點到 L_2 的距離．
從點 P 作直線 PA 垂直 L_2 於 A 點，由 L_2 的對稱比例式，
可令 A 點的坐標為$(3+2t，-4+t，-2+2t)$，t 為實數，

並得 $\overrightarrow{PA}=(2+2t,-5+t,-4+2t)$．

因為 $\overrightarrow{PA}\perp L_2$，所以 $\overrightarrow{PA}$ 和 L_2 的方向向量$(2，1，2)$垂直，

即$(2+2t，-5+t，-4+2t)\cdot(2，1，2)=0$，

解得 $t=1$，並得 $\overrightarrow{PA}=(4,-4,-2)$．

故兩平行線 L_1 與 L_2 的距離為

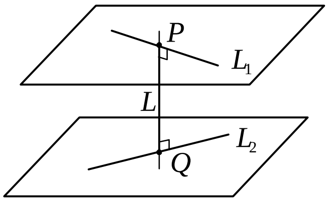
$|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}=6$.

【例題 15】

求兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-2}{-1}$ 和 $L_2:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-1}$ 之公垂線方程式及公垂線段長．

Ans：公垂線方程式 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$，公垂線段長 $2\sqrt{3}$

【詳解】



如右圖，設公垂線 L 與 L_1 交於 P 點，與 L_2 交於 Q 點．
因為 P，Q 兩點分別在直線 L_1 與 L_2 上，
所以可設 P，Q 兩點的坐標為 $P(3s，4-2s，2-s)$，
s 為實數，$Q(3+2t，-1-t，-2-t)$，t 為實數，

並得 $\overrightarrow{PQ}=(3-3s+2t,-5+2s-t,-4+s-)$.

又因為 $\overrightarrow{PQ}$ 和直線 L_1 與 L_2 的方向向量

$\overrightarrow{v_1}=(3,-2,-1)$，$\overrightarrow{v_2}=(2,-1,-1)$ 均垂直，

所以由內積等於 0，可得

$$\begin{cases}3(3-3s+2t)-2(-5+2s-t)-(-4+s-t)=0\\2(3-3s+2t)-(-5+2s-t)-(-4+s-t)=0\end{cases},$$

整理得 $\begin{cases}-14s+9t=-23\\-9s+6t=-15\end{cases}$，解得 $\begin{cases}s=1\\t=-1\end{cases}$.

因此，P 點的坐標為$(3，2，1)$，Q 點的坐標為$(1，0，-1)$，

並得公垂線的方向向量為 $\overrightarrow{PQ}=(-2,-2,-2)=(-2)(1,1,1)$，

及公垂線方程式為 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$，

又 $\overline{PQ}=\sqrt{(1-3)^2+(0-2)^2+((-1)-1)^2}=2\sqrt{3}$，

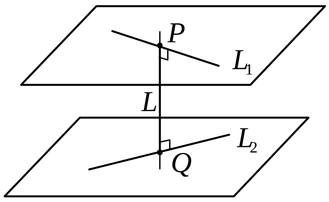
即兩歪斜線 L_1 與 L_2 的公垂線段長為 $2\sqrt{3}$ ．

【類題 15】

求兩歪斜線 $L_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$ 和 $L_2:\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{-5}$ 之公垂線方程式及公垂線段長．

Ans：公垂線方程式 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，公垂線段長 $\sqrt{6}$

【詳解】



如右圖，設公垂線 L 與 L_1 交於 P 點，與 L_2 交於 Q 點．
因為 P，Q 兩點分別在直線 L_1 與 L_2 上，
所以可設 P，Q 兩點的坐標為
$P(2+s，-2-s，1+s)$，s 為實數，
$Q(-2+3t，1+t，5-5t)$，t 為實數，

並得 $\overrightarrow{PQ}=(-4-s+3t,3+s+t,4-s-5t)$．

又因為 $\overrightarrow{PQ}$ 和直線 L_1 與 L_2 的方向向量

$\overrightarrow{v_1}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{v_2}=(3,1,-5)$ 均垂直，

所以由內積等於 0，可得

$$\begin{cases}1(-4-s+3t)-1(3+s+t)+1(4-s-5t)=0\\3(-4-s+3t)+1(3+s+t)-5(4-s-5t)=0\end{cases},$$

整理得 $\begin{cases}-3s-3t=3\\3s+35t=29\end{cases}$，解得 $\begin{cases}s=-2\\t=1\end{cases}$．

因此，P 點的坐標為 $(0，0，-1)$，
Q 點的坐標為 $(1，2，0)$，

並得公垂線的方向向量為 $\overrightarrow{PQ}=(1,2,1)$，

及公垂線方程式為 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$，

又 $\overline{PQ}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{6}$，

即兩歪斜線 L_1 與 L_2 的公垂線段長為 $\sqrt{6}$．

重要精選考題

基礎題

1. **下列哪一個選項是直線 L：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+5}{3}$ 和**

平面 E：$x+y+z=6$ 的交點?

(1) (2，2，2)，(2) (3，2，1)，(3) (1，2，3)，

(4) (−3，2，7)，(5) (4，1，1) .

Ans：(5)

【詳解】

由 L：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+5}{3}$ 可得 L 上的點坐標為

$(2+t，-3+2t，-5+3t)$，t 為實數，

將其代入 E：$x+y+z=6$，得 $6t=12$，解得 $t=2$.

因此交點為(4，1，1) .

故正確的選項為(5) .

2. **設 L 為兩平面 $3x+2y+z=4$ 和 $x+2y+2z=4$ 的交線 .**

下列哪一條直線與 L 平行?

(1) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ **，(2)** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$ **，(3)** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{5}$ **，**

(4) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$ **，(5)** $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{2}$ **.**

Ans：(4)

【詳解】

因為 L 的方向向量 $\vec{v}$ 與兩平面的法向量均垂直，

所以 $\vec{v}//(3,2,1)\times(1,2,2)\quad(2,\ 5$.

所有選項中，

僅選項(4) $\frac{x}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$ 的方向向量與(2，−5，4)平行，

又 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$ 上一點(0，0，0)並不在 $3x+2y+z=4$ 上，

因此 L 與 $\frac{x}{2}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{4}$ 平行．

故正確的選項為(4)．

3. **已知坐標空間中兩相異平面 E_1，E_2 皆通過 $A(-1，2，0)$與 $B(3，0，2)$兩點，試問以下哪些點也同時在此二平面上？**
(1) (2，2，2)，(2) (1，1，1)，(3) (4，−2，2)，(4) (−3，3，−1)，(5) (−5，−4，−2)．

Ans：(2)(4)

【詳解】
由題意知，平面 E_1 與 E_2 相交於直線 AB．
因此直線 AB 上的每一點也同時在 E_1，E_2 上．
依序將選項中各點代入直線 AB 的方程式 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{1}$，
得知只有(1，1，1)及(−3，3，−1)在直線 AB 上．
故正確的選項為(2)(4)．

4. **下列哪些選項與方程組 $\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ 的解相同？**

(1) $y=0$ **.** **(2)** $\begin{cases}2x+3z=0\\y=0\end{cases}$ **.** **(3)** $x=y=0$ **.**

(4) $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$ **. (5)** $\begin{cases}6x+4y+9z=0\\2x+y+3z=0\end{cases}$ **.** **【91 學測】**

Ans：(2)(4)(5)

【詳解】

$\begin{cases}2x+y+3z=0\\4x+3y+6z=0\end{cases}$

$\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix}1&3\\3&6\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}3&2\\6&4\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=(-3):0:2$

令 $\begin{cases}x=-3t\\y=0\\z=2t\end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3z=0 \\ y=0 \end{cases}$$ 令$z=2t$，則$x=-3t$，$y=0$（合）

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}z=0 \\ 4x+3y+6z=0 \end{cases} \overset{\times 2}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 4x+3y+6z=0 \end{cases}$$（合）

$$\begin{cases} 6x+4y+9z=0 \\ 2x+y+3z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x:y:z=\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3:0:(-2)$$（合）．

5.　設空間中一平面 F：$x-3y+2z+4=0$ 及一直線 $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+1}{-5}$．求包含 L 且與 F 垂直之平面 E 的方程式．

Ans：$x+y+z=4$

【詳解】

設平面 E 的方程式為 $ax+by+cz=d$，

其法向量為 $\overrightarrow{n}=(a,b,c)$．

由題意可知：$\overrightarrow{n}$ 與 F 的法向量$(1，-3，2)$及 L 的方向向量$(2，3，-5)$均垂直，

即 $\overrightarrow{n}\,//\,(1,-3,2)\times(2,3,-5)=9(1,1,1)$．

因此取 $\overrightarrow{n}=(1,1,1)$，

並設 E 的方程式為 $x+y+z=d$，

將 L 上一點$(-1，6，-1)$代入，得 $d=4$．

故平面 E 的方程式為 $x+y+z=4$．

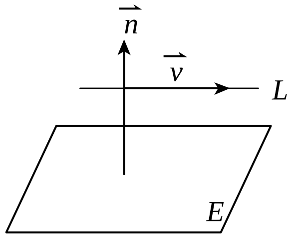
6.　設直線 L 的方程式為 $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$，則下列哪一個平面與 L 平行?

(1) $2x-y+z=1$，(2) $x+y-z=2$，(3) $3x-y+2z=1$，(4) $3x+2y+z=2$，(5) $x-3y+z=1$．

Ans：(2)

【詳解】

若平面與直線平行，則
平面的法向量將與直線的方向向量垂直，
且直線上的點均不在平面上．



由直線 $L:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 可知：

L 的方向向量為$(3,-1,2)$，L 上一定點$(2,-1,1)$．

(1) 因為 $2x-y+z=1$ 的法向量為$(2,-1,1)$，
又$(2,-1,1)\cdot(3,-1,2)=9\neq0$，
所以平面與直線不平行．

(2) 因為 $x+y-z=2$ 的法向量為$(1,1,-1)$，
又$(1,1,-1)\cdot(3,-1,2)=0$，
所以平面與直線可能平行，
將定點$(2,-1,1)$代入 $x+y-z=2$，
得 $2+(-1)-1=0\neq2$，
因此定點不在平面上，即平面與直線平行．

(3) 因為 $3x-y+2z=1$ 的法向量為$(3,-1,2)$，
又$(3,-1,2)\cdot(3,-1,2)=14\neq0$，
所以平面與直線不平行．

(4) 因為 $3x+2y+z=2$ 的法向量為$(3,2,1)$，
又$(3,2,1)\cdot(3,-1,2)=9\neq0$，
所以平面與直線不平行．

(5) 因為 $x-3y+z=1$ 的法向量為$(1,-3,1)$，
又$(1,-3,1)\cdot(3,-1,2)=8\neq0$，
所以平面與直線不平行．

由上面的討論可知：正確的選項為(2)．

7. **設 L 為 $x-y+z=1$ 與 $x+y-z=1$ 兩平面的交線，則直線 L 上與點 $Q(1,2,3)$ 距離最近之點的坐標為何？**

Ans：$\left(1,\dfrac{5}{2},\dfrac{5}{2}\right)$

【詳解】

$x-y+z=1$……①

$x+y-z=1$……②

①＋② ⇒ $x=1$，

代入① ⇒ $1-y+z=1$ ⇒ $y=z$。

設 P(1，t，t)∈L，則

$PQ^2=(1-1)^2+(t-2)^2+(t-3)^2$

$=2t^2-10t+13=2(t-\frac{5}{2})^2+\frac{1}{2}$，

當 $t=\frac{1}{2}$，即 P(1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$)時得最小值。

8. **已知點 *A*(1，4，2)與直線** $L:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$**，求**

(1) 點 *A* 到直線 *L* 的距離．

(2) 點 *A* 對直線 *L* 的對稱點坐標．

(3) 包含點 *A* 與直線 *L* 的平面方程式．

Ans：(1) $\sqrt{5}$, (2) (1，0，4)，(3) $5x-2y-4z=-11$

【詳解】

(1) 由直線 *L* 的參數式，

可設 *A* 對 *L* 的垂足 *H* 的坐標為

$(-1+2t，1+t，1+2t)$，*t* 為實數．

因為 $\overrightarrow{AH}\perp L$，

所以$(-2+2t，-3+t，-1+2t)\cdot(2，1，2)=0$，

解得 $t=1$，並得 *H* 的坐標為(1，2，3)，$\overrightarrow{AH}=(0,-2,1)$．

故點 *A*到直線 *L* 的距離為 $\overline{AH}=\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$．

(2) 設點 *A* 對直線 *L* 的對稱點為 $A'(x，y，z)$．

因為 $\overline{AA'}$的中點為 *H*，

所以 *H* 坐標可以表示為 $(\frac{1+x}{2},\frac{4+y}{2},\frac{2+z}{2})$．

又由(1)得知 *H* 的坐標為(1，2，3)，

所以 $(\frac{1+x}{2},\frac{4+y}{2},\frac{2+z}{2})=(1，2，3)$，

解得 $x=1$，$y=0$，$z=4$．

故點 *A* 對直線 *L* 的對稱點 A'之坐標為(1，0，4)．

(3) 設包含點 A 與直線 L 之平面方程式的法向量為 $\overrightarrow{n}$.

因為平面包含直線 L,

所以法向量 $\overrightarrow{n}$ 與直線 L 的方向向量(2，1，2)垂直 .

又由直線 L 的參數式得知，L 上有一點 $B(-1，1，1)$,
因為平面包含點 A，B,

所以法向量 $\overrightarrow{n}$ 與向量 $\overrightarrow{AB}=(-2,-3,-1)$ 也垂直,

因此法向量 $\overrightarrow{n}$ 與(2，1，2)×(−2，−3，−1)＝(5，−2，−4)平行 .

並可設平面方程式為 $5x-2y-4z=k$.
因為平面包含點 $A(1，4，2)$，所以將其代入，得
$k=5\cdot1-2\cdot4-4\cdot2=-11$.
因此包含點 A 與直線 L 的平面方程式為 $5x-2y-4z=-11$.

9. **已知兩歪斜線** $L_1:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-8}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ **與** $L_2:\dfrac{x+3}{-3}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-6}{4}$**，點 P 在 L_1 上，點 Q 在 L_2 上，且直線 PQ 是 L_1 與 L_2 的公垂線．求**
(1) P，Q 兩點的坐標．
(2) L_1 與 L_2 的公垂線段長．
Ans：(1) $P(3，8，3)$，$Q(-3，-7，6)$，(2) $3\sqrt{30}$

【詳解】
(1) 由 L_1 和 L_2 的直線參數式,
可設點 P 的坐標為$(3+3t，8-t，3+t)$，t 為實數,
點 Q 的坐標為$(-3-3s，-7+2s，6+4s)$，s 為實數 .
因為直線 PQ 是 L_1 與 L_2 的公垂線,

所以 $\overrightarrow{PQ}\perp(3,-1,1)$，$\overrightarrow{PQ}\perp(-3,2,4)$,

又 $\overrightarrow{PQ}=(-6-3s-3t,-15+2s+t,3+4s-t)$,

因此,

$$\begin{cases}(-6-3s-3t,-15+2s+t,3+4s-t)\cdot(3,-1,1)=0\\(-6-3s-3t,-15+2s+t,3+4s-t)\cdot(-3,2,4)=0\end{cases},$$

整理得 $\begin{cases}-7s-11t=0\\29s+7t=0\end{cases}$，解得 $s=0$，$t=0$．

故 P 點的坐標為(3，8，3)，Q 點的坐標為(−3，−7，6)．

(2) L_1 與 L_2 的公垂線段長為

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-3-3)^2+(-7-8)^2+(6-3)^2}=3\sqrt{30}\ .$$

進階題

10. 設坐標空間中三條直線 L_1,L_2,L_3 的方程式分別為

$$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8}\ ;\quad L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4}\ ;\quad L_3:\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=-\frac{z}{4}\ .$$

試問下列哪些選項是正確的?

(1) L_1 與 L_2 相交．

(2) L_2 與 L_3 平行．

(3) 點 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離．

(4) 直線 $L:\begin{cases}x=0\\ \dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+4}{-3}\end{cases}$ 與直線 L_1，L_2 皆垂直．

(5) 三直線 L_1，L_2，L_3 共平面．　**【97 學測】**

Ans：(1)(2)(4)(5)

【詳解】

(A) L_1 的方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(1，6，8)$，

L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(1，3，4)$，

不平行，且相交於(0，−3，−4)。

(B) L_2 的方向向量 $\overrightarrow{v_2}=(1，3，4)$，

L_3 的方向向量 $\overrightarrow{v_3}=(1，3，4)$，

故 $L_2 \parallel L_3$。

(C) $\overrightarrow{QP}=(0，-3，-4)$與

L3的方向向量$\overrightarrow{v_3}=(1，3，4)$不垂直，

因$\overrightarrow{QP}\cdot\vec{v}=0-9-16\neq 0$。

(D) $E_1：x=0\Rightarrow$ 法向量$\vec{m}=(1，0，0)$，

$E_2：3y+4z+25=0\Rightarrow$法向量$\vec{n}=(0，3，4)$，

L 的方向向量$\vec{v}=\vec{m}\times\vec{n}=(0，-4，3)$，

$\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{v}=(1，6，8)\cdot(0，-4，3)=0$，故 $L_1\perp L$，

$\overrightarrow{v_2}-\vec{v}=(1，3，4)\cdot(0，-4，3)=0$，故 $L_2\parallel L$。

(E) $L_1：x=t，y=6t-3，z=8t-4$，代入：

$\dfrac{t}{1}=\dfrac{6t-3}{3}=\dfrac{8t-4}{4}$，解得 $t=1$，

故 L_1，L_3交於(1，3，4)，

又由(A)知 L_1，L_2相交，

由(B)知 $L_2\parallel L_3$，

故 L_1，L_2，L_3共平面。

11. 坐標空間中，直線L上距離點Q最近的點稱為Q在L上的投影點．已知L為平面$2x-y=2$上通過點$(2,2,2)$的一直線．請問下列哪些選項中的點可能是原點O在L上的投影點？　　【99 學測】

(1) $(2,2,2)$，**(2)** $(2,0,2)$，**(3)** $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{5},0\right)$，**(4)** $\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{2}{5},-2\right)$，

(5) $\left(\dfrac{8}{9},-\dfrac{2}{9},-\dfrac{2}{9}\right)$．

Ans：(1)(3)(5)

【詳解】

$E：2x-y=2$ 的法向量為$\vec{v}=(2，-1，0)$。

(1) A(2，2，2)，$\overrightarrow{AA}=(0，0，0)$，$\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，

即 $\overline{AA}\perp\overrightarrow{OA}$，A 可為投影點。

(2) B(2，0，2)代入 E $\Rightarrow 2\times2-0\neq2$，B 不在 E 上，
B 不可為投影點。

(3) C($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，0)

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OC}=(-\frac{6}{5}，-\frac{12}{5}，-2)\cdot(\frac{4}{5}，-\frac{2}{5}，0)$

$=-\frac{24}{25}+\frac{24}{25}+0=0$，

即 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OC}$，C 可為投影點。

(4) D($\frac{4}{5}$，$-\frac{2}{5}$，-2)，$\overrightarrow{AD}=(-\frac{6}{5}，-\frac{12}{5}，-4)$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OD}=-\frac{24}{25}+\frac{24}{25}+8\neq0$，D 不可為投影點。

(5) E($\frac{8}{9}$，$-\frac{2}{9}$，$-\frac{2}{9}$)，$\overrightarrow{AE}=(-\frac{10}{9}，-\frac{20}{9}，-\frac{20}{9})$，

$\overline{AE}\cdot\overrightarrow{OE}=-\frac{80}{81}+\frac{40}{81}+\frac{40}{81}=0$，

即 $\overline{AE}\perp\overrightarrow{OE}$，E 可為投影點。

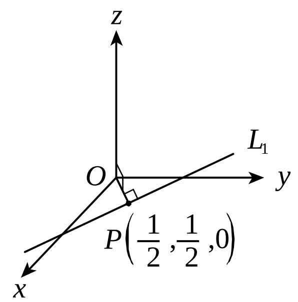
12. 已知直線 $L_1:\begin{cases}x+y=1\\z=0\end{cases}$ 與 z 軸不共平面，試在 L_1 上任找一點 P，使其距離 z 軸最近，並求其最近的距離．

Ans：$P(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，最近距離 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】

L_1 的參數式為 $\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=0\end{cases}$（$t$ 為實數），

即 P 點的坐標為$(t，1-t，0)$，t 為實數．
z 軸上的動點 Q 之坐標為$(0，0，s)$，s 為實數．



當 $\overline{PQ}$ 有最小值時，

$\overrightarrow{PQ}=(-t,-1+t,s)$ 與 L_1 的方向向量(1，−1，0)

和 z 軸的方向向量(0，0，1)均垂直，

即 $\begin{cases}(-t,-1+t,s)\cdot(1,-1,0)=0\\(-t,-1+t,s)\cdot(0,0,1)=0\end{cases}$，

整理得 $\begin{cases}-2t+1=0\\s=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}t=\dfrac{1}{2}\\s=0\end{cases}$．

故當 P 點坐標為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 時，

有最近距離 $|\overrightarrow{PQ}|=|(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)|=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

【解二】

由右圖可知當點 P 坐標為 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 時，有最近的距離

$\sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{1}{2}-0)^2+(0-0)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

13. $H:x-y+z=2$ **為坐標空間中一平面，** L **為平面** H **上的一直線．**

已知點 $P(2,1,1)$ **為** L **上距離原點** O **最近的點，** $(2,b,c)$ **為** L **的方向向量，**

求 b**，** c **．　　　　　　【100 學測】**

Ans： $b=-1$， $c=-3$

【詳解】

P(2，1，1)在 L 上，當然在 H 上。

點 P(2，1，1)為 L 上距離原點 O 最近的點，

故 $\overrightarrow{OP}$ ＝(2，1，1)⊥L，則

(2，1，1)．(2，h，k)＝0

⇒ 4＋h＋k＝0……………………①

H 的法向量(1，−1，1)．(2，h，k)＝0

⇒ 2－h＋k＝0……………………②

由① ② 解得 k＝−3，h＝−1，

即 L 的方向向量為 $\overrightarrow{v}$ ＝(2，−1，−3)。

14. 一光線沿著直線 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 射向平面 ***E***，

經 ***E*** 反射後沿著 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ 射出，求

(1) 兩直線 L_1，L_2 的交點．

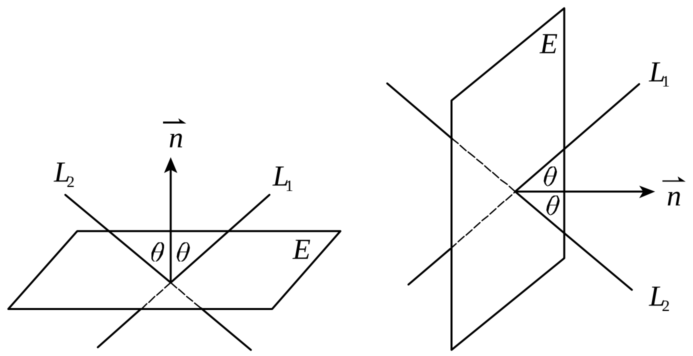
(2) 平面 ***E*** 的方程式．

Ans：(1) (0，0，0)，(2) $x+y=0$ 或 $x-y-4z=0$

【詳解】

(1) 因為兩直線 L_1，L_2 均通過原點(0，0，0)，
且兩直線的方向向量不平行，
所以兩直線 L_1，L_2 的交點為(0，0，0)．

(2) 設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$．由下圖可知：



$\overrightarrow{n}$ 為向量(1，2，2)與(2，1，−2)的角平分向量

或為向量(1，2，2)與 −(2，1，−2)的角平分向量．

因為兩向量(1，2，2)與(2，1，−2)的長度均為 3，

所以 $\overrightarrow{n}$ 與(1，2，2)＋(2，1，−2)＝(3，3，0)＝3(1，1，0)

或(1，2，2)－(2，1，−2)＝(−1，1，4)＝(−1)(1，−1，−4)平行．

因此當取 $\overrightarrow{n}=(1,1,0)$ 時，平面 E 的方程式為 $x+y=d$，

又因為平面 E 通過原點，所以平面 E 的方程式為 $x+y=0$．

而當取 $\overrightarrow{n}=(1,-1,-4)$，可得平面 E 的方程式為 $x-y-4z=0$．

故平面 E 的方程式可能為 $x+y=0$ 或 $x-y-4z=0$．

段考試題精華

1. 選出正確的選項：

(1)空間中，$x+2y=0$的圖形為一直線．

(2)空間中，$x-2y+3z=6$的圖形為一直線．

(3)空間中，$\begin{cases} x+2y=0 \\ x-2y+3z=6 \end{cases}$的圖形為一直線．

(4)空間中，$x=y=0$的圖形為一直線．

(5)空間中，$\begin{cases} x=2-t \\ y=3+2t \\ z=4-3t \end{cases}$（$t$是實數）的圖形為一直線．　【中山女高】

Ans：(3)(4)(5)

【詳解】

(1) 空間中, $x+2y=0$ 的圖形為一平面.

(2) 空間中, $x-2y+3z=6$ 的圖形為一平面.

(3) 空間中, $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-2y+3z=6 \end{cases}$ 表示兩平面的交線,

因此其圖形為一直線.

(4) 空間中, $x=y=0$ 的圖形為一直線 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

（t是實數）.

(5) 空間中, $\begin{cases} x=2-t \\ y=3+2t \\ z=4-3t \end{cases}$（$t$是實數）的圖形為一直線.

由上面的討論可知：正確的選項為(3)(4)(5)

2. 某日老師讓五位同學分別在黑板上寫下坐標空間中「x軸」的直線方程式：

<u>小瑩</u>：$y=0$，<u>小恩</u>：$y^2+z^2=0$，<u>小怡</u>：$\begin{cases} y=z \\ y+z=0 \end{cases}$，<u>小妃</u>：$\begin{cases} x=\sqrt{6}-3t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$（$t$是實數），

<u>小廷</u>：$\begin{cases} y+11z=0 \\ 5y+19z=0 \\ 7y+37z=0 \end{cases}$．請問以上有幾位同學寫的「$x$軸方程式」是正確的?

(1)1位．　**(2)**2位．　**(3)**3位．　**(4)**4位．　**(5)**5位．　【北一女中】

Ans：(4)

【詳解】

小瑩：$y=0$ 表示 xz 平面.

小恩：$y^2+z^2=0$ 表示直線 $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$（$t$ 是實數），

即為 x 軸.

小怡：$\begin{cases} y=z \\ y+z=0 \end{cases}$ 表示 $y=z=0$，即為 x 軸.

小妃：$\begin{cases} x=\sqrt{6}-3t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 與直線 $\begin{cases} x=s \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$（$s$ 是實數）相同，

即為 x 軸.

小廷：$\begin{cases} y+11z=0 \\ 5y+19z=0 \\ 7y+37z=0 \end{cases}$ 解得 $y=z=0$，即為 x 軸.

由上面的討論可知：正確的選項為(4)

3. 已知平面 E：$ax+y+cz+d=0$ 通過點 $(1,2,3)$ 而且與直線 L：$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y+3=0 \end{cases}$ 垂直，求 $a+c+d$ 的值．【嘉義女中】

Ans：-8

【詳解】

將 L：$\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+2y+3=0 \end{cases}$ 改成參數式為 $\begin{cases} x=-2t-3 \\ y=t \\ z=3t+4 \end{cases}$

（t 是實數），

可得 L 的一個方向向量為 $(-2,1,3)$

◎ **4.** 求 $P(1,6,4)$ 到直線 L：$\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-9}{2}$ 的距離．【師大附中】

Ans：$\sqrt{17}$

【詳解】

5. 已知平面 E：$ax+by+2z=3$ 包含直線 L：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$，求數對 (a,b)．

【新竹高中】

Ans：(−9，3)

【詳解】

6. 設直線 L_1 通過點 $A(2,-3,-1)$，與平面 E：$x-4y+2z=1$ 垂直，且與直線

L_2：$\frac{x-7}{4}=\frac{3-y}{3}=\frac{z+1}{k}$ 交於一點 P，求

(1)交點 P 的坐標．

(2)同時包含 L_1，L_2 的平面方程式．　【臺中女中】

Ans：(1) (−1，9，−7)，(2) 6x－5y－13z＝40

【詳解】

7. 已知兩直線 L_1：$\begin{cases}\text{方向向量 } \overrightarrow{u_1} \\ \text{通過 } A\text{點}\end{cases}$，$L_2$：$\begin{cases}\text{方向向量 } \overrightarrow{u_2} \\ \text{通過 } B\text{點}\end{cases}$；平面 E：$\begin{cases}\text{法向量 } \overrightarrow{n} \\ \text{通過 } B\text{點}\end{cases}$．

問下列哪些選項是正確的?

(1)若 $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{u_2}$，則 $L_1\perp L_2$．

(2)若 $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{n}$，則 $L_1 // E$．

(3)若 $\overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{n}$，則 $L_1\perp E$．

(4)若 $\overrightarrow{u_1}\not\parallel\overrightarrow{u_2}$，且 $\left(\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{u_2}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$，則 L_1 與 L_2 交於一點．

(5)若 $\overrightarrow{u_1}\not\parallel\overrightarrow{n}$，則 L_1 與 E 交於一點．　【彰化高中】

Ans：(3)(4)

【詳解】

8. 一架戰鬥機在空間坐標點 $P(60,70,120)$ 處發生故障，而後沿著直線 $\dfrac{x-60}{1}=\dfrac{y-70}{2}=\dfrac{z-120}{2}$ 的方向，以每秒 20 單位的速度向海平面（即 xy 平面）俯衝．求飛機在幾秒後接觸到海平面．【臺南女中】

Ans：9 秒

【詳解】

◎

9. 已知空間中兩相交直線 L_1：$x-2=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{-2}$，$L_2$：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$，其交點為 (x_1,y_1,z_1)，若兩直線 L_1 與 L_2 的公垂線為 $\dfrac{x-x_1}{6}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$，$m, n$ 為整數，求

(1)序組 (x_1,y_1,z_1)．

(2)數對 (m,n)．【高雄女中】

Ans：(1) (2，1，−2)，(2) (−8，−13)

【詳解】