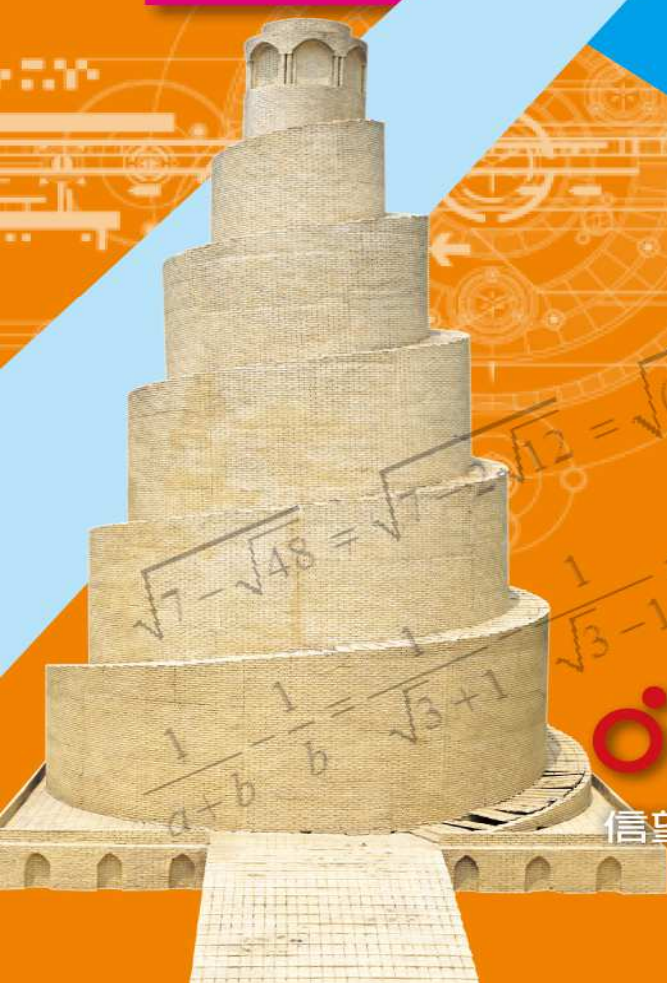


高中數學

進階
講義

指數與對數的應用

陳清海 老師



信望愛文教基金會

ok135 指數與對數的應用

一、查對數表

查對數表：

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

如上表可知： $\log 1.37 \approx 0.1367$ ， $0.1818 \approx \log 1.52$ 。

【範例 1】

利用常用對數表查出下列各對數的值：

(1) $\log 1.56$ ， (2) $\log 156000$ ， (3) $\log 0.00156$ 。

Ans：(1) 0.1931，(2) 5.1931，(3) -2.8069

【詳解】

(1) $\log 1.56 \doteq 0.1931$ 。

(2) $\log 156000 = \log(1.56 \times 10^5) = \log 1.56 + 5 \approx 5.1931$ 。

(3) $\log 0.00156 = \log(1.56 \times 10^{-3}) = \log 1.56 + (-3) \approx -2.8069$ 。

【演練 1】

利用常用對數表查出下列各對數的值：

(1) $\log 1.77$ ， (2) $\log 1770$ ， (3) $\log 0.000177$ 。

Ans：(1) 0.248，(2) 3.248，(3) -3.752

【詳解】

(1) $\log 1.77 \doteq 0.248$ 。

(2) $\log 1770 = \log(1.77 \times 10^3) = \log 1.77 + 3 \approx 3.248$ 。

(3) $\log 0.000177 = \log(1.77 \times 10^{-4}) = \log 1.77 + (-4) \approx -3.752$ 。

【範例 2】

利用常用對數表，查出下列各真數的值：

(1) $\log x = 0.0212$ ， (2) $\log x = 2.2529$ ， (3) $\log x = -2.7496$ 。

Ans：(1) 1.05，(2) 179，(3) 0.00178

【詳解】

(1) $x \doteq 1.05$ 。

(2) 由表可知： $\log x = 2 + 0.2529 \approx \log 100 + \log 1.79 = \log 179$ ，因此 $x \approx 179$ 。

(3) 由表可知： $\log x = -3 + 0.2504 \approx \log 0.001 + \log 1.78 = \log 0.00178$ ，因此 $x \approx 0.00178$ 。

【備註】計算機：

(1) $\log x = 0.0212 \Rightarrow x = 1.0280162981264735113841309896617$ ，

(2) $\log x = 2.2529 \Rightarrow x = 179.01935992650072167849927881166$ ，

(3) $\log x = -2.7496 \Rightarrow x = 0.0017799180203953357291454935638424$ 。

【演練 2】

利用常用對數表，查出下列各真數的值：

(1) $\log x = 0.1004$ ， (2) $\log x = 1.2175$ ， (3) $\log x = -1.7878$ 。

Ans：(1) 1.26，(2) 16.5，(3) 0.0163

【詳解】

(1) $x \doteq 1.26$ 。

(2) 由表可知： $\log x = 1 + 0.2175 \approx \log 10 + \log 1.65 = \log 16.5$ ，
因此 $x \approx 16.5$ 。

(3) 由表可知： $\log x = -2 + 0.2122 \approx \log 0.01 + \log 1.63 = \log 0.0163$ ，
因此 $x \approx 0.0163$ 。

【備註】計算機：

(1) $\log x = 0.1004 \Rightarrow x = 1.2600854590882379324669965636968$ ，

(2) $\log x = 1.2175 \Rightarrow x = 16.500610013202276702466428487543$ ，

(3) $\log x = -1.7878 \Rightarrow x = 0.016300465239848434551244569519158$ 。

二、內插法

設 $x_1 < x < x_2$ ，且其對應的對數值為 $\log x_1$ ， $\log x$ ， $\log x_2$ 。

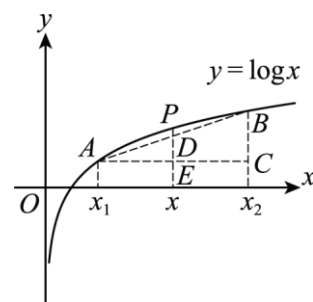
由右圖知：

$\triangle ADE$ 與 $\triangle ABC$ 相似，當 x_1 與 x_2 相差甚小時，點 P 與點 D 可視為同一點。因此由相似三角形的性質

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}},$$

得

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log x - \log x_1}{\log x_2 - \log x_1}.$$



【範例 3】

已知 $\log 7.28 \approx 0.8621$ ， $\log 7.29 \approx 0.8627$ ，求 $\log 728300$ 的值（四捨五入求至小數點以下第四位）。

Ans : 5.8623

【詳解】

$$\log 728300 = \log(7.283 \times 10^5) = 5 + \log 7.283.$$

因此，將 x 與 $\log x$ 列表如下：

		x	$\log x$		
0.01	0.003	7.28	0.8621	k	0.0006
		7.283	$\log 7.283$		
		7.29	0.8627		

$$\text{即 } \frac{0.003}{0.01} = \frac{k}{0.0006}.$$

得 $k = 0.00018$ 。

因此 $\log 7.283 \approx 0.8621 + k = 0.8621 + 0.00018 = 0.86228 \approx 0.8623$ ，即

$$\log 728300 = 5 + \log 7.283 \approx 5.8623.$$

【備註】 $\log 728300 = 5.8623103099542704131767487018265$ 。

【演練 3】

已知 $\log 4.05 = 0.6075$ ， $\log 4.06 = 0.6085$ ，求 $\log 0.40575$ 的值（四捨五入求至小數點以下第四位）。

Ans : -0.3918

【詳解】

$$\log 0.40575 = \log(4.0575 \times 10^{-1}) = (-1) + \log 4.0575 .$$

因此，將 x 與 $\log x$ 列表如下：

		x	$\log x$		
0.01	0.0075	4.05	0.6075	k	0.001
		4.0575	$\log 4.0575$		
		4.06	0.6085		

$$\text{即 } \frac{0.0075}{0.01} = \frac{k}{0.001} .$$

$$\text{得 } k = 0.00075 .$$

$$\text{因此 } \log 4.0575 \approx 0.6075 + k = 0.6075 + 0.00075 = 0.60825, \text{ 即}$$

$$\log 0.40575 = (-1) + \log 4.0575 \approx -1 + 0.60825 = -0.39175 \approx -0.3918 .$$

【備註】 $\log 0.40575 = -0.39174147150173051625310164229851$ 。

三、首數與尾數

1. 設 a 是一個正數，且 $a=b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ 且 n 是整數，則 $\log a = n + \log b$ ，其中 n 稱為 $\log a$ 的首數， $\log b$ 稱為 $\log a$ 的尾數，且尾數 $\log b$ 滿足 $0 \leq \log b < 1$ 。
2. 對數 $\log a$ 之首數 n 的性質：

	a 的整數部分為 $n+1$ 位，	例如： $a=12345$ ，
$a \geq 1$	科學記號 $a=b \times 10^n$ ，	$a=1.2345 \times 10^4$ ，
	對數 $\log a = n + \log b$ ，	$\log a = 4 + \log 1.2345$ ，
	$\log a$ 的首數為 n 。	$\log a$ 的首數為 4。
$0 < a < 1$	a 自小數點後第 n 位開始不為 0，	例如： $a=0.00345$ ，
	科學記號 $a=b \times 10^{-n}$ ，	$a=3.45 \times 10^{-3}$ ，
	對數 $\log a = (-n) + \log b$ ，	$\log a = (-3) + \log 3.45$ ，
	$\log a$ 的首數為 $-n$ 。	$\log a$ 的首數為 -3。

3. 常用對數值： $\log 2 = 0.3010$ ， $\log 3 = 0.4771$ ， $\log 7 = 0.8451$ 。
運用上面 3 個數據可推得：
 $\log 4 = 2\log 2 \approx 0.602$ ， $\log 5 = 1 - \log 2 \approx 0.699$ ， $\log 6 = \log 2 + \log 3 \approx 0.7781$ ，
 $\log 8 = 3\log 2 \approx 0.903$ ， $\log 9 = 2\log 3 \approx 0.9542$ 。

【範例 4】

已知 $\log 4.32 \approx 0.6355$ ，寫出下列各對數的首數與尾數：

- (1) $\log 432$ ， (2) $\log 0.432$ ， (3) $\log x = -3.2$ 。

Ans：(1) 首數 2，尾數 0.6355，(2) 首數 -1，尾數 0.6355，(3) 首數 -4，尾數 0.8

【詳解】

- (1) $\log 432 = \log(100 \times 4.32) = \log 100 + \log 4.32 \approx 2 + 0.6355$ ，
因此 $\log 432$ 的首數為 2，尾數為 0.6355。

- (2) $\log 0.432 = \log(0.1 \times 4.32) = \log 0.1 + \log 4.32 \approx (-1) + 0.6355$ 。

因此 $\log 0.432$ 的首數為 -1，尾數為 0.6355。

- (3) $\log x = -3.2 = (-4) + 0.8$ ，

因此 $\log x$ 的首數為 -4，尾數為 0.8。

【演練 4】

已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，寫出下列各對數的首數與尾數：

(1) $\log 40$ ， (2) $\log 0.005$ ， (3) $\log x = -1.23$.

Ans：(1) 首數 1，尾數 0.6020，(2) 首數 -3，尾數 0.699，(3) 首數 -2，尾數 0.77

【詳解】

$$(1) \log 40 = \log(10 \times 4) = \log 10 + 2\log 2 \approx 1 + 0.6020 .$$

因此 $\log 40$ 的首數為 1，尾數為 0.6020 .

$$(2) \log 0.005 = \log\left(\frac{5}{10^3}\right) = \log 5 - 3 = (1 - \log 2) - 3 \approx 0.699 + (-3) .$$

因此 $\log 0.005$ 的首數為 -3，尾數為 0.699 .

$$(3) \log x = -1.23 = (-2) + 0.77 ,$$

因此 $\log x$ 的首數為 -2，尾數為 0.77 .

【範例 5】

已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ，求將 5^{60} 乘開後是幾位數？又其最高位數字為何？

Ans：42 位數，最高位數字為 8

【詳解】

$$\text{因為 } \log 5^{60} = 60 \times \log 5 = 60 \times (1 - \log 2) \approx 60 \times 0.699 = 41.94 ,$$

其首數為 41，尾數為 0.94，所以 5^{60} 是 42 位數 .

又因為 $\log 8 \approx 0.903 < 0.94 < 0.9542 \approx \log 9$ ，所以 5^{60} 的最高位數字為 8 .

【演練 5】

已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $(0.6)^{30}$ 小數點後第 n 位開始

不為 0，求 n 的值及第一個不是 0 的數字 .

Ans：第 7 位，第一個不是 0 的數字是 2

【詳解】

因為 $\log 0.6 = \log 2 + \log 3 - 1 \approx -0.2219$ ，所以

$$\log(0.6)^{30} = 30 \times \log(0.6) \approx 30 \times (-0.2219) = -6.657 = -7 + 0.343 ,$$

其首數 $n = -7$ ，尾數為 0.343 .

因為 $\log 2 \approx 0.3010 < 0.343 < 0.4771 \approx \log 3$ ，所以可知 $(0.6)^{30}$ 自小數點後第 7 位開始

出現不為 0 的數字，第一個不是 0 的數字是 2。

四、等比數列與級數

設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列。

$$(1) \text{ 公比 } r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

$$(2) \text{ 第 } n \text{ 項 } a_n = a_1 r^{n-1}.$$

$$(3) \text{ 前 } n \text{ 項和 } S_n = \begin{cases} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & \text{當 } r \neq 1 \\ na_1, & \text{當 } r = 1 \end{cases}.$$

【範例 6】

已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_2 = 108$ ， $a_6 = \frac{64}{3}$ ，求：

(1) 首項 a_1 與公比 r ，

(2) a_4 。

Ans : (1) $a_1 = 162$ ， $r = \frac{2}{3}$ ； $a_1 = -162$ ， $r = -\frac{2}{3}$ ，(2) 48

【詳解】

$$(1) \text{ 因為 } a_2 = a_1 r = 108, \quad a_6 = a_1 r^5 = \frac{64}{3},$$

$$\text{所以 } r^4 = \frac{a_6}{a_2} = \frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^4, \text{ 因此 } r = \pm \frac{2}{3}.$$

$$\text{當 } r = \frac{2}{3} \text{ 時, } 108 = a_1 \times \frac{2}{3}, \text{ 解得 } a_1 = 162;$$

$$\text{當 } r = -\frac{2}{3} \text{ 時, } 108 = a_1 \times \left(-\frac{2}{3}\right), \text{ 解得 } a_1 = -162.$$

$$(2) \text{ 不論 } r = \frac{2}{3} \text{ 或 } r = -\frac{2}{3}, \quad a_4 = a_2 r^2 = 108 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 48.$$

【演練 6】

已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_2=48$ ， $a_6=12$ ，求：

(1) 首項 a_1 與公比 r ，

(2) a_4 。

Ans : (1) $a_1 = 48\sqrt{2}$ ， $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ； $a_1 = -48\sqrt{2}$ ， $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，(2) 24

【詳解】

(1) 因為 $a_2 = a_1 r = 48$ ， $a_6 = a_1 r^5 = 12$ ，

所以 $r^4 = \frac{a_6}{a_2} = \frac{12}{48} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$ ，因此 $r = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

當 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 時， $48 = a_1 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，解得 $a_1 = 48\sqrt{2}$ ；

當 $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 時， $48 = a_1 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ，解得 $a_1 = -48\sqrt{2}$ 。

(2) 不論 $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $r = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ， $a_4 = a_2 r^2 = 48 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 24$ 。

【範例 7】

已知等比級數 $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}$ 的和為 1023，求 n 的值。

Ans : 10

【詳解】

因為等比級數 $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}$ 的首項為 1，公比為 2，

所以其和為

$$S = \frac{1(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1 = 1023,$$

解得 $n=10$ 。

【演練 7】

已知等比級數 $1+3+3^2+\dots+3^n=1093$ ，求 n 的值。

Ans : 6

【詳解】

因為等比級數 $1+3+3^2+\dots+3^n$ 的

首項為 1，公比為 3，共有 $n+1$ 項，

$$\text{所以其和為 } S = \frac{1(1-3^{n+1})}{1-3} = \frac{3^{n+1}-1}{2} = 1093,$$

解得 $n=6$.

【範例 8】

一等比數列的首項為 7，末項為 448，總和為 889，求此數列的項數 .

Ans : 7

【詳解】

設此等比數列的公比為 r ，共有 n 項 .

由題意知，末項為 448，總和為 889，

$$\text{可列得 } \begin{cases} 7 \cdot r^{n-1} = 448 \\ \frac{7 \cdot (1-r^n)}{1-r} = 889 \end{cases}, \text{ 推得}$$

$$\begin{cases} r^{n-1} = 64 \\ \frac{1-r \cdot r^{n-1}}{1-r} = 127 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-r \cdot 64}{1-r} = 127 .$$

解得 $r=2$ ，代回 $r^{n-1}=64$ ，解得 $n=7$.

【演練 8】

一等比數列的首項為 384，末項為 3，總和為 765，求此數列的項數 .

Ans : 8

【詳解】

設此等比數列的公比為 r ，共有 n 項 .

由題意知，末項為 3，總和為 765，

$$\text{可列得 } \begin{cases} 384 \cdot r^{n-1} = 3 \\ \frac{384 \cdot (1-r^n)}{1-r} = 765 \end{cases},$$

$$\text{推得 } \begin{cases} r^{n-1} = \frac{1}{128} \\ \frac{1-r \cdot r^{n-1}}{1-r} = \frac{255}{128} \end{cases} \Rightarrow \frac{1-r \cdot \frac{1}{128}}{1-r} = \frac{255}{128} .$$

解得 $r = \frac{1}{2}$ ，代回 $r^{n-1} = \frac{1}{128}$ ，解得 $n=8$ 。

【範例 9】

設等比級數 $1+2+2^2+\dots+2^{49}$ 的和為 S ，試問：
 S 為幾位正整數？最高位數字為何？

Ans：16 位正整數，最高位數字為 1

【詳解】

等比級數 $1+2+2^2+\dots+2^{49}$ 的和 S 為 $\frac{1(2^{50}-1)}{2-1} = 2^{50}-1$ 。

因為 2^{50} 的個位數字為 4，所以 $2^{50}-1$ 不會影響位數，
 即 2^{50} 與 $2^{50}-1$ 的位數相同，且最高位數字也相同。

因此，將 2^{50} 取對數得

$$\log 2^{50} = 50 \log 2 \approx 50 \times 0.3010 = 15.05 = 15 + 0.05,$$

故 $\log 2^{50}$ 的首數為 15，尾數為 0.05，且 $\log 1 < 0.05 < \log 2$ 。

因此， 2^{50} 為 $15+1=16$ 位正整數，最高位數字為 1，

即 $2^{50}-1$ 為 16 位正整數，最高位數字為 1。

【演練 9】

設等比級數 $1+5+5^2+\dots+5^{25}$ 的和為 S ，試問：
 S 為幾位正整數？最高位數字為何？

Ans：18 位正整數，最高位數字為 3

【詳解】

等比級數 $1+5+5^2+\dots+5^{25}$ 的和 S 為 $\frac{1(5^{26}-1)}{5-1} = \frac{5^{26}-1}{4}$ 。

因為 5^{26} 的個位數字為 5，

所以 $\frac{5^{26}}{4}$ 與 $\frac{5^{26}-1}{4}$ 的位數相同，

且最高位數字也相同。因此，

將 $\frac{5^{26}}{4}$ 取對數得

$$\log \frac{5^{26}}{4} = 26 \log 5 - 2 \log 2 \approx 17.572 = 17 + 0.572,$$

故 $\log \frac{5^{26}}{4}$ 的首數為 17，尾數為 0.572，

且 $\log 3 < 0.572 < \log 4$ 。

因此， $\frac{5^{26}}{4}$ 為 18 位正整數，最高位數字為 3，

即 $\frac{5^{26}-1}{4}$ 為 18 位正整數，最高位數字為 3。

五、指數與對數的應用

1. 複利本利和的計算公式：
若本金為 P ，利率為 r ，期數為 n ，本利和為 S ，
採複利計息，則 $S = P(1+r)^n$ 。
2. 半衰期：是指某種放射性物質衰變至原來數量的一半所需的時間。若物質原重 w_0 ，半衰期 t （時間單位），
則經過 x （時間單位）後剩下的質量為 $w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{t}}$ 。

【範例 10】

王先生向銀行貸款 100 萬元，約定年利率 4%，每年複利一次。
如果王先生於 20 年後償還本利，那麼他應該還給銀行多少錢呢？
（已知 $\log 1.04 \approx 0.017$ ， $\log 2.1875 \approx 0.34$ ）

Ans：218 萬 7500 元

【詳解】

由複利的計算方式可得：

20 年後的本利和為 $S = 100(1+0.04)^{20}$ （萬元）。

設 $a = (1+0.04)^{20}$ ，將 a 取對數得

$$\log a = \log(1+0.04)^{20} = 20 \log 1.04 \approx 20 \times 0.017 = 0.34,$$

因此 $a \approx 2.1875$ ，即 $S \approx 218.75$ 。

故他應該還給銀行 218 萬 7500 元。

【演練 10】

已知某定期存款約定年利率為 3%，每四個月為一期，
以複利計息一次。現清標存入 10000 元，10 年後期滿領回，
問：屆時清標可以領回多少本利和呢？（請使用書末的對數表）

Ans：13460 元

【詳解】

因為年利率為 3%，每四個月以複利計息一次，共計 10 年，

所以，共計息 30 期，每一期的利率為 1%。

因此由複利的計算方式可得：10 年後的本利和為

$$S=10000(1+0.01)^{30} \text{ (元)}.$$

設 $a=(1+0.01)^{30}$ ，將 a 取對數得

$$\log a = \log(1+0.01)^{30} = 30 \log 1.01 \approx 30 \times 0.0043 = 0.129,$$

經查表得 $\log 1.34 \approx 0.1271$ ， $\log 1.35 \approx 0.1303$ ，

由內插法求得 $\log 1.346 \approx 0.129$

因此 $a \approx 1.346$ ，即 $S \approx 13460$ 。

故他可以領回 13460 元。

【範例 11】

某研究機構發現碘 131 外洩，且發現時碘 131 的數量為 12 單位。
已知碘 131 的半衰期為 8 天，且外洩時間為 64 天前，求原先外洩的碘 131 有多少單位。

Ans : 3072

【詳解】

因為 64 天是 8 天的 8 倍，

所以碘 131 已經衰變為原先的 $\left(\frac{1}{2}\right)^8$ 。

設原先外洩的碘 131 有 x 單位，

則 $\left(\frac{1}{2}\right)^8 x = 12$ ，得 $x = 3072$ ，

即原先外洩的碘 131 有 3072 單位。

【演練 11】

已知某放射性物質，經過 12 天後會衰變成原來的 $\frac{1}{8}$ 。

現有此放射性物質 400 公克，問：

經過多少天後，此放射性物質會剩下 25 公克？

Ans : 16

【詳解】

因為 $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ，所以 12 天為 3 個半衰期，即一個半衰期為 4 天。

又因為 25 公克是 400 公克的 $\frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$,

所以需經過 4 個半衰期,

因此經過 16 天後, 此放射性物質會剩下 25 公克.

【範例 12】

在養分充足的情況下, 細菌的數量會以指數函數的方式成長, 假設細菌 A 的數量每兩個小時可以成長為兩倍, 細菌 B 的數量每三個小時可以成長為三倍. 若養分充足且一開始兩種細菌的數量相等, 則大約幾小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10?

(1) 24 小時, (2) 48 小時, (3) 69 小時, (4) 96 小時, (5) 117 小時.

Ans : (5)

【詳解】

假設一開始 A, B 兩細菌的數量皆為 N .

由題意知, t 小時後細菌

A 的數量為 $N \cdot 2^{\frac{t}{2}}$, B 的數量為 $N \cdot 3^{\frac{t}{3}}$,

若細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10,

則可列得 $\frac{N \cdot 3^{\frac{t}{3}}}{N \cdot 2^{\frac{t}{2}}} = 10$, 即 $\frac{3^{\frac{t}{3}}}{2^{\frac{t}{2}}} = 10$.

將此方程式取對數以 10 為底得到 $\log_{10} \frac{3^{\frac{t}{3}}}{2^{\frac{t}{2}}} = \log_{10} 10$, 推得

$$\log_{10} 3^{\frac{t}{3}} - \log_{10} 2^{\frac{t}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{t}{3} \log_{10} 3 - \frac{t}{2} \log_{10} 2 = 1.$$

因此, $\frac{t}{3} \times 0.4771 - \frac{t}{2} \times 0.3010 = 1$, 解得 $t \approx 117.19$.

故大約 117 小時後細菌 B 的數量除以細菌 A 的數量最接近 10.

故選項(5)正確.

【演練 12】

根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後， t 小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的 $100(1-2^{-kt})\%$ ，其中 k 是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要 T 小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則 T 最接近下列哪一個選項？
 (1) 5 小時，(2) 7.5 小時，(3) 9 小時，(4) 11.5 小時，(5) 13 小時。

Ans : (4)

【詳解】

由題意知，3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息，代入得到

$$100(1-2^{-k \cdot 3})\% = 70\% \Rightarrow 2^{-3k} = 0.3.$$

又 T 小時後，已經有 99% 的人口聽到該訊息，代入得到

$$100(1-2^{-kT})\% = 99\% \Rightarrow 2^{-kT} = 0.01.$$

$$\text{即 } (2^{-3k})^{\frac{T}{3}} = 0.01 \Rightarrow (0.3)^{\frac{T}{3}} = 0.01.$$

$$\text{兩邊以 10 為底取對數得到 } \frac{T}{3} \log 0.3 = -2,$$

$$\text{推得 } T = \frac{-6}{\log 0.3} = \frac{-6}{\log 3 - 1} \approx \frac{-6}{-0.5229} \approx 11.47.$$

故選項(4)正確。

ok135ex

一、基礎題

1. 已知 $\log x$ 的首數與 $\log 345$ 的首數相同， $\log x$ 的尾數與 $\log 0.123$ 的尾數相同，求 x 。

Ans : 123

【詳解】

$\log 345 = \log(3.45 \times 10^2) = \log 3.45 + \log 10^2 = 2 + \log 3.45$ ，首數為 2。

$\log 0.123 = \log(1.23 \times 10^{-1}) = -1 + \log 1.23$ ，尾數為 $\log 1.23$ ，

故 $\log x = 2 + \log 1.23 = \log 100 + \log 1.23 = \log 123$ ，得

$x = 123$ 。

2. 已知 $\log 3.45 \approx 0.5378$ ，
 (1) 若 $\log x = 3.5378$ ，則 x 是多少？
 (2) 若 $\log x = -1.4622$ ，則 x 是多少？

Ans : (1) 3450，(2) 0.0345

【詳解】

(1) $\log x = 3.5378 = 3 + 0.5378$
 $= \log 10^3 + \log 3.45 = \log 3450$ ，
 故 $x = 3450$ 。

(2) $\log x = -1.4622 = -2 + 0.5378$
 $= \log 10^{-2} + \log 3.45 = \log 0.0345$ ，
 故 $x = 0.0345$ 。

3. 數學教科書所附的對數表中， $\log 4.34 = 0.6375$ ， $\log 4.35 = 0.6385$ 。
 根據 $\log 4.34$ 和 $\log 4.35$ 的查表值以內插法求 $\log 4.342$ ，設求得的
 值為 p ，則下列哪一個選項是正確的？

(1) $p = \frac{1}{2}(0.6375 + 0.6385)$ ，

(2) $p = 0.2 \times 0.6375 + 0.8 \times 0.6385$ ，

(3) $p = 0.8 \times 0.6375 + 0.2 \times 0.6385$ ，

(4) $p = 0.6375 + 0.002$ ，

(5) $p = 0.6385 - 0.002$

【98 指甲】

Ans : (3)

【詳解】

由內插法知

$\log 4.342$

$$= 0.6375 + (0.6385 - 0.6375) \times \frac{2}{10}$$

$$= 0.6375 + 0.0002$$

$$= 0.6377。$$

4. (1) 12^{40} 是幾位數？

(2) 若將 $(0.98)^{1000}$ 表示成小數，則從小數點後第幾位開始出現

不為 0 的數字？（已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ ）

Ans：(1) 44 位數，(2) 第 9 位

【詳解】

$$(1) \log 12^{40} = 40 \cdot \log 12$$

$$= 40 \cdot (2\log 2 + \log 3)$$

$$= 40(0.6020 + 0.4771)$$

$$= 43.164，$$

12^{40} 為 44 位數。

$$(2) \log(0.98)^{1000} = 1000 \cdot \log(0.98) = 1000 \cdot \log \frac{2 \times 7^2}{100}$$

$$= 1000(\log 2 + 2\log 7 - 2) = 1000(0.3010 + 2 \times 0.8451 - 2)$$

$$= 1000 \times (-0.0088) = -8.8 = -9 + 0.2，首數為 -9，$$

故 $(0.98)^{1000}$ 從小數點後第 9 位開始出現不為 0 的數字。

5. 設一等比數列的第 3 項為 16，第 6 項為 128。如果此數列的前 n 項之總和大於 10^5 ，那麼 n 的最小值為何？

Ans：15

【詳解】

設首項為 a_1 ，公比為 r ，

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 16 \dots (1)，$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 = 128 \dots (2)，$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2，$$

$$\text{代入}(1) \Rightarrow 4a_1 = 16 \Rightarrow a_1 = 4，$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{4(1-2^n)}{1-2} = 4(2^n - 1) > 10^5，$$

$$\begin{aligned}\log(4 \cdot 2^n) &> \log 10^5 \\ \Rightarrow (n+2)\log 2 &> 5 \\ \Rightarrow n+2 &> \frac{5}{0.3010} \doteq 16.6 \\ \Rightarrow n &\geq 15.\end{aligned}$$

6. 有一個城市的人口，每過一年就增加原來人口數的 10%。若依此速度增加下去，幾年後此城市的人口會超過原來人口數的 3 倍。
(已知 $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 11 \approx 1.0414$)

Ans : 12

【詳解】

$$\begin{aligned}(1.1)^n &> 3 \\ \Rightarrow \log(1.1)^n &> \log 3 \\ \Rightarrow n \cdot \log 1.1 &> \log 3 \\ \Rightarrow n &> \frac{\log 3}{\log 1.1} = \frac{\log 3}{\log 11 - 1} = \frac{0.4771}{1.0414 - 1} \doteq 11.52 \\ \Rightarrow n &\geq 12.\end{aligned}$$

7. 求滿足不等式 $(1.25)^n > 10^7$ 的最小正整數 n 的值。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$)

Ans : 73

【詳解】

$$\begin{aligned}(1.25)^n &> 10^7 \\ \Rightarrow \log(1.25)^n &> \log 10^7 \\ \Rightarrow n \cdot \log 1.25 &> 7 \\ \Rightarrow n &> \frac{7}{\log 1.25} = \frac{7}{\log \frac{10}{8}} = \frac{7}{1 - 3\log 2} = \frac{7}{1 - 3 \times 0.3010} = \frac{7}{0.097} \doteq 72.16, \\ \Rightarrow n &\geq 73.\end{aligned}$$

8. 將 $\left(\frac{1}{3}\right)^{40}$ 表為小數時，小數點後到第一個不為 0 的數字間共有幾個 0？
又第一個不為 0 的數字為何？(已知 $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 2 \approx 0.3010$)

Ans : (1) 19 個 0, (2) 8

【詳解】

$$a = \left(\frac{1}{3}\right)^{40}$$

$$\Rightarrow \log a = 40 \log \frac{1}{3} = 40(-\log 3) = -40 \times 0.4771 = -19.084 = -20 + 0.916。$$

(1) $\log a$ 的首數為 -20 ，

故小數點後到第一個不為 0 的數字間共有 19 個 0。

(2) 尾數為 0.916，而

$$\log 9 = 2 \log 3 = 0.9542, \log 8 = 3 \log 2 = 0.9030,$$

故第一個不為 0 的數字為 8。

$$\text{【備註】} \left(\frac{1}{3}\right)^{40} = 8.2252633399699590812820584006073e-20。$$

二、進階題

9. 設 a 為大於 1 的正整數，問：使得 $\log_a 64$ 為正整數的 a 共有幾個？

Ans：4

【詳解】

$a = 2, 4, 8, 64$ 共 4 個。

10. 設 $a = 2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-5} \cdots 2^{-99}$ ，問 a 在小數點後第幾位開始不是零？

Ans：第 753 位

【詳解】

$$\begin{aligned} a &= 2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-5} \cdots 2^{-99} \\ &= 2^{-1-3-5-\cdots-99} = 2^{-(1+3+5+\cdots+99)} \\ &= 2^{-(1+99) \times 50 \div 2} = 2^{-2500}, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log a = -2500 \cdot \log 2 = -2500 \times 0.3010 = -752.5 = -753 + 0.5,$$

$\Rightarrow \log a$ 的首數為 -753 ，

$\Rightarrow a$ 在小數點後第 753 位開始不是零。

11. 設 $\log a$ 的首數與尾數恰好是二次方程式 $3x^2 - 5x + k = 0$ 的兩根，求實數 k 的值。

Ans：2

【詳解】

設 $\log a = n + \log b$ ， n 為整數， $0 \leq \log b < 1$ ，則

$$n + \log b = \log a = \frac{5}{3} \Rightarrow n = 1, \log b = \frac{2}{3},$$

$$\Rightarrow \frac{k}{3} = n \cdot \log b = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow k = 2.$$

12. 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖．如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？ 【99 學測】

(1) 9 千隻，(2) 108 千隻，(3) 2200 千隻，(4) 3200 千隻，(5) 32000 千隻．

(參考數據： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_7 \approx 0.8451$)

Ans：(3)

【詳解】

$$a = (1.08)^{100}$$

$$\Rightarrow \log a = 100 \log(1.08) = 100(\log 108 - \log 100)$$

$$= 100(2\log 2 + 3\log 3 - 2) = 3.33$$

$$\Rightarrow \log a = 3 + 0.33 = \log 10^3 + \log 2.1647 = \log 21647 \leftarrow \text{線性插值法}$$

$$\Rightarrow a \approx 2165.$$

【備註】 $(1.08)^{100} = 2199.7612563412852819736854443173$ 。

$\log 2000 = 3.3010$ ， $\log 3000 = 3.4771$ ，故 $2000 < a < 3000$ 。

13. 設定期存款的年利率為 6%，每四個月為一期，複利計算，老王存進 10000 元，言明定期 5 年，利用對數表，求期滿後的本利和。

Ans：13460 (元)

【詳解】

$$\text{本利和 } S = 10000 \times (1.02)^{15},$$

$$\Rightarrow \log S = \log 10000 + 15 \times \log 1.02 = 4 + 15 \times 0.0086$$

$$= 4 + 0.129 = \log 10000 + \log 1.34586 = \log 13458$$

$$\Rightarrow S = 13458.$$

14. 某公司為了響應節能減碳政策，決定在五年後將公司該年的二氧化碳排放量降為目前排放量的 75%。公司希望每年依固定的比率（當年和前一年排放量的比）逐年減少二氧化碳的排放量。若要達到這項目標，則該公司每年至少要比前一年減少多少百分比的二氧化碳？（百分比計算到小數點後第一位，以下四捨五入，本題請利用書末對數表） 【98 學測】

Ans : 5.6%

【詳解】

$$(1-x)^5 = 0.75$$

$$\Rightarrow \log(1-x)^5 = 5 \cdot \log(1-x) = \log 0.75 = \log 7.5 - 1 = 0.8751 - 1 = -0.1249$$

$$\Rightarrow \log(1-x) = -0.025 = 0.975 - 1 = \log 9.44 - \log 10 = \log 0.944$$

$$\Rightarrow 1-x = 0.944$$

$$\Rightarrow x = 0.056$$

即每年減少 5.6%。

15. 試問： $2^{106} + 3^{66}$ 為幾位正整數？

Ans : 33 位

【詳解】

$$a = 2^{106} \Rightarrow \log a = 106 \times \log 2 = 106 \times 0.3010 = 31.906, \text{ 故 } a \text{ 為 } 32 \text{ 位數。}$$

$$b = 3^{66} \Rightarrow \log b = 66 \times \log 3 = 66 \times 0.4771 = 31.4886, \text{ 故 } b \text{ 為 } 32 \text{ 位數。}$$

而 a 的尾數為 0.906， b 的尾數為 0.4886，

$$0.906 + 0.4886 = 1.3946 > 1,$$

故 $2^{106} + 3^{66}$ 為 33 位正整數。

【備註】 $2^{106} + 3^{66} = 1.1203279279723929405770964694759e+32$ ，首數為 32。

16. 西元 1943 年，第二次世界大戰還在激烈進行著。這時在英國軍營裡流傳著一個「用四個 4 來表出整數」的數學問題，為戰爭的緊張氣氛所繃緊的神經，找到了舒緩的機會。下面就是「用四個 4 來表出整數」的方法之一：令

$$a = \log_{\sqrt{4}} \left[\log_{\sqrt{4}} \left(\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}} \right) \right],$$

其中的 $\sqrt{\sqrt{\dots \sqrt{\sqrt{4 \times 4}}}}$ 共含 2002 層二次根號，

則 a 的值等於_____。

Ans : -2000

【詳解】

$$\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{\sqrt{4\times 4}}}} = (4\times 4)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}} = (2^4)^{\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right)^{2000}} = 2^{2^{-2000}},$$

$$a = \log_2 [\log_2 2^{2^{-2000}}] = \log_2 [2^{-2000}] = -2000.$$

17. 下表為常用對數表 $\log_{10} N$ 的一部分：

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

請問 $10^{3.032}$ 最接近下列哪一個選項？

(1) 101 , (2) 201 , (3) 1007 , (4) 1076 , (5) 2012. [學測 101]

Ans : (4)

【詳解】

$$\text{令 } x = 10^{3.032}$$

$$\log x = \log 10^{3.032} = 3 + 0.032 = \log 10^3 + \log 10^{0.032}$$

經查表可知

$$0.0294 < 0.032 < 0.0334$$

$$\Rightarrow \log 1.07 < \log 10^{0.032} < \log 1.08$$

$$\Rightarrow \log 10^3 + \log 1.07 < \log 10^3 + \log 10^{0.032} < \log 10^3 + \log 1.08$$

$$\Rightarrow \log 1070 < \log 10^{3.032} < \log 1080$$

$$\therefore 1070 < x < 1080,$$

故選(4)