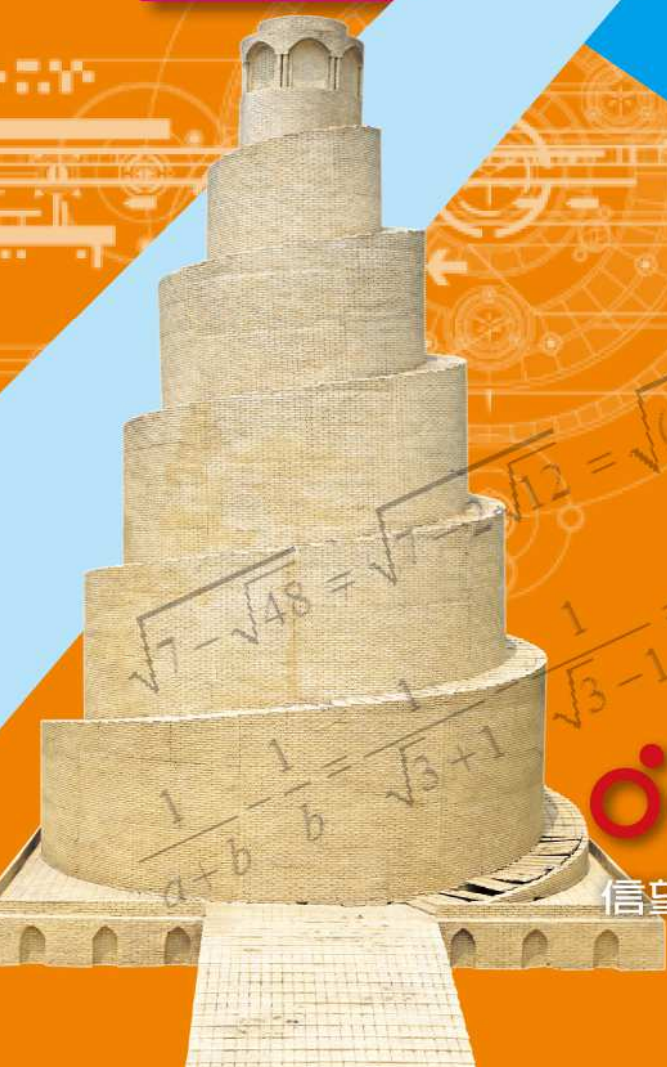


數學 1 進階講義

指數

景美女中 · 王若蘭老師



信望愛文教基金會

3-1 指 數



定理敘述

1. 設 a 為實數， n 是自然數，則：

(1) 正整數指數： $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ 個}} = a \times a \times \dots \times a$ ，讀作 a 的 n 次方，

其中 a 稱為底數， n 為指數。

(2) 零指數：設 $a \neq 0$ ， $a^0 = 1$ 。

(3) 負整數指數：設 $a \neq 0$ ， $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 。

註： 0 的正整數次方為 0 ，但 0^0 與負整數次方 (0^{-n}) 無意義。

2. 整數指數律：

設 a, b 是不為零的實數， r, s 是整數，則：

(1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ 。

(2) $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ 。

(3) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ 。

(4) $a^r \times b^r = (ab)^r$ 。

3. 設 $a > 0$ ， $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

4. 設 $a > 0$ ， $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

5. 有理數的指數律：

設 $a > 0, b > 0$ ， r, s 是有理數，則：

(1) $a^r \times a^s = a^{r+s}$ 。

(2) $(a^r)^s = a^{r \times s}$ 。

(3) $a^r \times b^r = (ab)^r$ 。

6. 實數的指數律：

設 $a > 0, b > 0$ ， r, s 實數，則實數的指數律同上。

定理證明或說明

1. 【證】 $(a^{\frac{1}{n}})^n = (a^{\frac{1}{n} \times n}) = a^1 = a$ 。所以， $a^{\frac{1}{n}}$ 是方程式 $x^n = a$ 的根。

對正整數 n 與正實數 a ，方程式 $x^n = a$ 恰有一個正實根 $\sqrt[n]{a}$

2. 【證】 令 $x = (\sqrt[n]{a})^m$ ，將之 n 次方得

$$x^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m,$$

故得 $x = \sqrt[n]{a^m}$ 。

注意事項

有理數的指數律，底數必為正實數

關鍵字

整數、有理數、實數的指數律

例題 1

下列指數哪些是有意義的？

(A) π^0 (B) $(-2)^{-3}$ (C) 0^5 (D) $(\sqrt{2})^3$ (E) 0^{-2} 。

Ans :

(A) $\pi^0 = 1$

(B) $(-2)^{-3} = \frac{1}{-8}$

(C) $0^5 = 0$

(D) $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$

(E) 0^{-2} 分母不可為 0

例題 2

計算下列各指數的值：

$$(1) 8^{\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (2) \left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (3) (0.064)^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

Ans：

$$\begin{aligned}(1) & (\sqrt{10}+3)^3 \times (\sqrt{10}-3)^3 \\ & = [(\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3)]^3 \\ & = (1)^3 \\ & = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) & \left[\left(\frac{1}{9}\right)^3 \times 81\right]^{-3} \times 9^{-3} \\ & = (3^{-6} \times 3^4)^{-2} \times 3^{-6} \\ & = 3^4 \times 3^{-6} = 3^{-2} \\ & = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) & (1+\sqrt{2})^3(2-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^3(2+\sqrt{2})^2 \\ & = [(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})]^3 \times [(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})]^2 \\ & = (-1) \times 4 \times [(1-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})]^2 \\ & = (-1)^3 \times (2)^2 = -4\end{aligned}$$

例題 3

設 a 是實數且 $a \neq 0$ ，已知 $a + a^{-1} = 3$ ，試求下列各式的值：

$$\begin{aligned}(1) & a^2 + a^{-2} = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (2) a^3 + a^{-3} = \underline{\hspace{2cm}}。 \\ (3) & a^4 + a^{-4} = \underline{\hspace{2cm}}。 \quad (4) a^5 + a^{-5} = \underline{\hspace{2cm}}。 \\ (5) & a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{2cm}}。 \end{aligned}$$

Ans：

$$(1) (a + a^{-1})^2 = a^2 + 2 + a^{-2}$$

$$\Rightarrow a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2$$

$$= 7$$

$$(2) a^3 + a^{-3} = (a + a^{-1})(a^2 - 1 + a^{-2})$$

$$= 3 \times (7 - 1)$$

$$= 18$$

$$(3) a^4 + a^{-4} = (a^2 + a^{-2})^2 - 2$$

$$= 7^2 - 2$$

$$= 47$$

$$(4) a^5 + a^{-5} = (a^2 + a^{-2})(a^3 + a^{-3}) - (a + a^{-1})$$

$$= 7 \times 18 - 3$$

$$= 123$$

$$(5) (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 = a + a^{-1} + 2 = 5,$$

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{5} \text{ (負不合)}$$

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

例題 4

$$(1) \text{ 設 } x, y \text{ 為實數, } 67^x = 27, 603^y = 81, \text{ 則 } \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{ 設 } x, y, z \text{ 為實數, 且 } \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 5^{3y} = 10^z, \text{ 則 } \frac{3z}{x} - \frac{4z}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Ans :

$$(1) \because 67^x = 3^3 \Rightarrow 67 = 3^{\frac{3}{x}} \dots\dots\dots ①$$

$$603^y = 3^4 \Rightarrow 603 = 3^{\frac{4}{y}} \dots\dots\dots ②$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow \frac{67}{603} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} \quad \therefore 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} = \frac{1}{9} = 3^{-2}, \therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

$$(2) \because \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} = 10^z \Rightarrow 2^{-4x} = 10^z$$

$$\therefore 2 = 10^{-\frac{z}{4x}}, \quad 2^{-12} = (10^{-\frac{z}{4x}})^{-12} = 10^{\frac{3z}{x}} \dots\dots ①$$

$$5^{3y} = 10^z \Rightarrow 5 = 10^{\frac{z}{3y}}, \quad 5^{12} = (10^{\frac{z}{3y}})^{12} = 10^{\frac{4z}{y}} \dots\dots ②$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow 10^{-12} = 10^{\frac{3z}{x} - \frac{4z}{y}} \quad \therefore \frac{3z}{x} - \frac{4z}{y} = -12$$

例題 5

假設在某項試驗中，細菌數每經過 1 日增為 a 倍。已知 3 日後細菌數

為 16000 隻， $4\frac{1}{2}$ 日後其數為 128000 隻，試求：

(1) a 值。 (2) $\frac{5}{2}$ 日後的細菌數。 (3) 細菌數為 256000 隻時所需的日數。

Ans :

(1) 令細菌數為 $f(x) = Ka^x$ ，其中 x 為經過的日數

$$\text{則 } f(4.5) = Ka^{4.5} = 128000 \quad f(3) = Ka^3 = 16000 \quad \dots\dots ①, \quad f(3) = Ka^3 = 16000 \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow a^{1.5} = 2^3, \quad a = 4$$

$$(2) \quad f(2.5) = f(3) / a^{0.5} = 16000 / 2 = 8000$$

$$(3) \quad f(x) = 256000 = 128000 \times 2 = Ka^{4.5} \times a^{0.5} = Ka^5,$$

$$\therefore x = 5$$



溫故知新

習題 1

下列指數哪些是有意義的？

(A) π^2 (B) $(-\frac{1}{2})^0$ (C) $(-3)^{-2}$ (D) $(3-\sqrt{3})^2$ (E) $(\sqrt{3}-3)^{-1}$ 。

習題 2

計算下列指數的值：

(1) $a^{-3} \times a^5 = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (2) $(a^3)^{-2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (3) $2^{-4} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

習題 3

$(\sqrt{6}+3)^4 \times (\sqrt{6}-3)^4 = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

習題 4

設 a 是不為零實數，則 $a^5 \times (a^{-2})^2 \times (a^{-3})^2 \times a^{10} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

習題 5

設 $x > 0$ 且 $x + x^{-1} = 5$ ，求下列各式之值：

(1) $x^2 + x^{-2} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (2) $x^3 + x^{-3} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(3) $x^4 + x^{-4} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。 (4) $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

習題 6

【89.學測】

假設世界人口自 1980 年起，50 年內每年增長率均固定。已知 1987 年世界人口達 50 億，1999 年第 60 億人誕生在賽拉佛耶。根據這些資料推測 2023 年世界人口數最接近下列哪一個數？

(A) 75 億 (B) 80 億 (C) 86 億 (D) 92 億 (E) 100 億。

習題 7

【91.學測】

某公司民國 85 年的營業額為 4 億元，民國 86 年營業額為 6 億元，該年的成長率為 50%。設 87，88，89 這三年的成長率皆相同，且民國 89 年的營業額為 48 億元，則該公司 89 年的成長率為 $\underline{\hspace{1cm}}$ %。

習題 8

【98.指考乙】

陳先生三年前買了一輛剛出廠的新車，買價 100 萬元；該汽車的價值在第一年後折舊 20%，第二年以後每年折舊前一年車價的 15%。若陳先生現在想用這部車換新車，則此舊車可抵 $\underline{\hspace{1cm}}$ 萬元。(萬元以下四捨五入)



習題 1 : 全

習題 2 : (1) a^2 (2) a^{-6} (3) $\frac{1}{16}$

習題 3 : 81

習題 4 : a^5

習題 5 : (1) 23 (2) 110 (3) 527 (4) $\sqrt{7}$

習題 6 : (C)

習題 7 : 100

習題 8 : 58