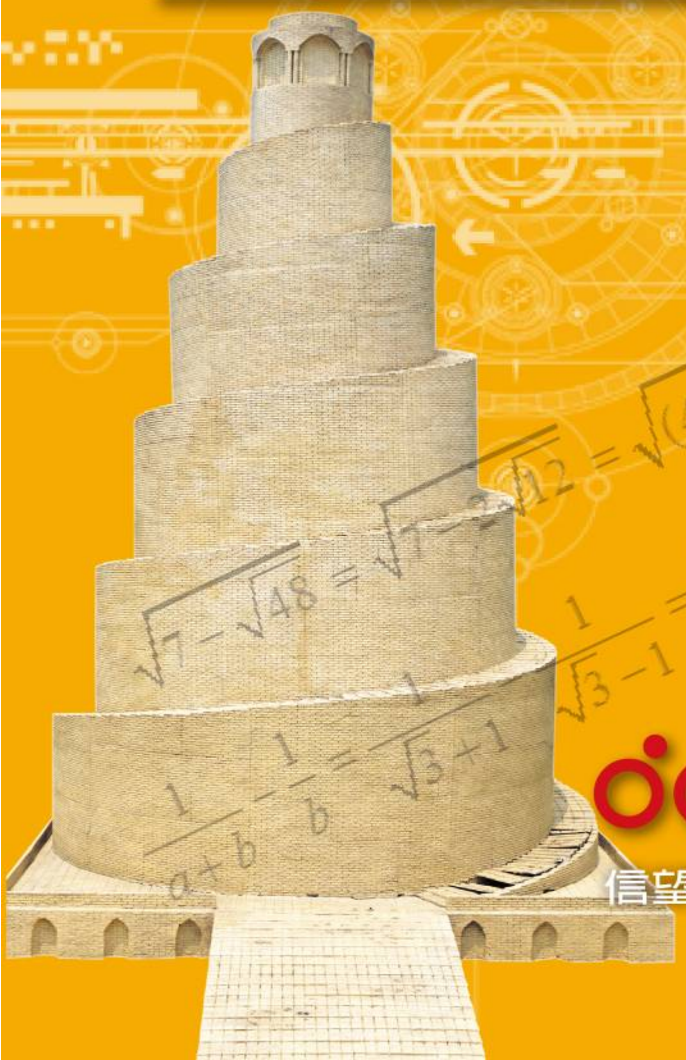
數學 基礎講義

和角、差角、倍角、半角公式

信望愛文教基金會‧數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

和角、差角、倍角、半角公式

前言

在從前學習畢氏定理的經驗告訴我們，我們對於直角三角形邊長比例的記憶範圍僅限於極少數特殊三角形。同樣的道理，對於大部份的角度我們並不會知道它所對應的三角函數值，若是手邊又剛好沒有三角函數表可以查表的時候我們是否有辦法利用有限的已知條件推導出非特別角的三角函數值呢？在這裡我們的學習重點將會放在分析多個角度合成的角度三角函數值與其組合角度之函數值的相對關係。

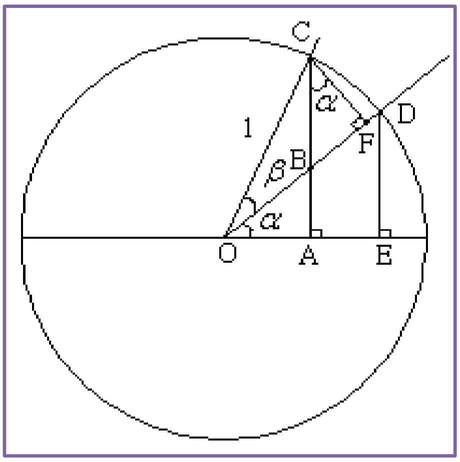
和角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

Proof of $\sin(\alpha+\beta)$



我們證明和角公式的起手式是先作一個單位圓，

以 X 軸為始邊先旋轉 α 度從原點作一射線交單位圓於 D 點，再以 $\overline{OD}$ 為使邊旋轉 β 度，作一射線交單位圓於 C 點。

接著從 D 點對 X 軸作垂足交 X 軸於 E 點；從 C 點對 $\overline{OD}$ 作垂足並交 $\overline{OD}$ 於 F 點；再從 C 點對 X 軸作垂足並交 X 軸於 A 點，到目前為止所有的前置作業可以說告一段落。
這時我們先暫時整理手中所掌握的有用資訊:

$\sin\alpha=\overline{DE}$，$\sin\beta=\overline{CF}$，$\cos\beta=\overline{OF}$，$\angle BCF=\angle BOA=\alpha$

從圖形中不難看出來我們證明的目標 $\sin(\alpha+\beta)=\overline{CA}=\overline{CB}+\overline{BA}$，所以我們接下來證明的脈絡將會是用手中有限的條件拼湊出這兩個線段。首先利用 ΔBCF 得出：

$$\overline{CB}=\frac{\overline{CF}}{\cos\alpha}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

再來看到跟 $\overline{BA}$ 有關的 ΔOBA

$\overline{BA} = \overline{OB} \times \sin\alpha$

$= (\overline{OF} - \overline{BF}) \times \sin\alpha$

$= (\cos\beta - \overline{CB} \times \sin\alpha) \times \sin\alpha$

$= (\cos\beta - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \times \sin\alpha) \times \sin\alpha$

$= \cos\beta \times \sin\alpha - \frac{\sin\beta \times \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

$= \cos\beta \times \sin\alpha - \frac{\sin\beta \times (1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}$

$= \cos\beta \times \sin\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta \times \cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

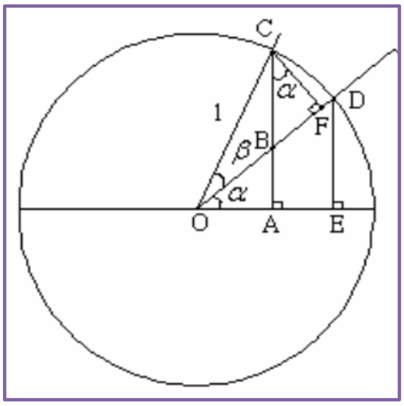
$= \cos\beta \times \sin\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} + \cos\alpha \times \sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \overline{CA} = \overline{CB} + \overline{BA}$

$= \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} + \cos\beta \times \sin\alpha - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} + \cos\alpha \times \sin\beta$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

在具備上個證明的已知資訊以後，餘弦的和角公式證明將會相對輕鬆許多。證明的目標



$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OA} = \cos\alpha \times \overline{OB}$

$= \cos\alpha \times (\overline{OF} - \overline{BF})$

$= \cos\alpha \times (\cos\beta - \frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \times \sin\alpha)$

$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

差角公式

關於差角公式我們可以藉由將合角公式裡的角度改為負號搭配之前所學之廣義三角函數性質輕鬆得出：

$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

倍角公式

倍角公式可以輕鬆的由倍角公式推導而出，只要在兩個角代上同樣的角度值即可得到。

Proof

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$= \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

半角公式

半角公式可以從餘弦的倍角公式輕鬆導出，只要在原有的角度 α 全部改為 $\frac{\alpha}{2}$。

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

分別對(1), (2)兩式進行移項化簡即可得到我們想要的結論：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

（註：其中 $\pm$ 的決定取決於 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限）

三倍角公式

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

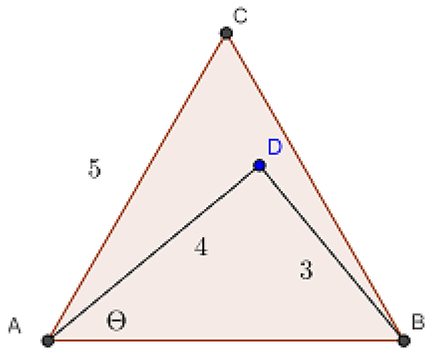
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

小試身手

例題 1	$\sin 74^\circ \cos 46^\circ + \cos 74^\circ \sin 46^\circ$
例題 2	$\cos 280^\circ \cos 200^\circ - \sin 100^\circ \sin 160^\circ$
例題 3	設 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\sin\beta = \frac{-15}{17}$ 且 $270^\circ < \alpha < 360^\circ$，$180^\circ < \beta < 270^\circ$ 試求 $\sin(\alpha-\beta)$以及 $\cos(\alpha-\beta)$
例題 4	ΔABC為一邊長 5 的正三角形，三角形內部一點D，若$\overline{AD}$=4，$\overline{BD}$ =3 則 $\cos\angle CAD$ =
例題 5	ΔABC中，已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{1}{5\sqrt{2}}$，$\overline{AC}$ =7 則求 (1)$\angle C$= (2) ΔABC之外接圓半徑 (3)ΔABC之面積
例題 6	ΔABC中，若 $\tan A=\frac{1}{2}$，$\tan B=\frac{1}{3}$，則$\angle C$=
例題 7	設 $\cos 2\theta=\frac{1}{3}$，則 $4(\cos^6\theta - \sin^6\theta)$=

解答與解析

例題1：



$$\sin 74^\circ \cos 46^\circ+\cos 74^\circ \sin 46^\circ=\sin(74^\circ+46^\circ)=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例題 2：$\cos 280^\circ \cos 200^\circ-\sin 100^\circ \sin 160^\circ=\sin 10^\circ(-\cos 20^\circ)-\sin 80^\circ(\sin 20^\circ)$

$$=-\sin 10^\circ \cos 20^\circ-\cos 10^\circ \sin 20^\circ$$

$$=-\sin(10^\circ+20^\circ)=\frac{-1}{2}$$

例題 3：$270^\circ < \alpha < 360^\circ$且 $\cos\alpha = \frac{3}{5}$，$\sin\alpha = \frac{-4}{5}$

$180^\circ < \beta < 270^\circ$且 $\sin\beta = \frac{-15}{17}$，$\cos\beta = \frac{-8}{17}$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-8}{17}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-15}{17}\right)=\frac{77}{85}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-8}{17}\right)+\left(\frac{-4}{5}\right)\left(\frac{-15}{17}\right)= \frac{36}{85}$$

例題 4：如圖所示，令$\angle DAB=\theta$

由圖可知 $\cos\theta=\frac{4}{5}$ $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\cos\angle CAD=\cos(60^\circ-\theta)$

$=\cos60^\circ\cos\theta+\sin60^\circ\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

例題 5：已知 $\cos A=\frac{3}{5}$，$\cos B=\frac{1}{5\sqrt{2}}$ $\Rightarrow\sin A=\frac{4}{5}$，$\sin B=\frac{7}{5\sqrt{2}}$

(1) $\cos C=\cos(180^\circ-(A+B))=-\cos(A+B)$

$=-(\cos A\cos B-\sin\sin B)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\angle C=45^\circ$

(2)由正弦定理可知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 其中R為外接圓半徑

$\frac{a}{\frac{4}{5}}=\frac{7}{\frac{7}{5\sqrt{2}}}=\frac{c}{\sin45^\circ}=2R$

$\Rightarrow R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

(3) ΔABC面積$=\frac{1}{2}ac\sin B=14$

例題 6：$\tan C=\tan(180^\circ-(A+B))=-\tan(A+B)$

$$=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=-1$$

例題 7：$4(\cos^6\theta-\sin^6\theta)$

$=4((\frac{1+\cos2\theta}{2})^3-(\frac{1-\cos2\theta}{2})^3)$

$=4((\frac{2}{3})^3-(\frac{1}{3})^3)=\frac{28}{27}$