數學2 進階講義

一階遞迴式

景美女中．李冠達老師

信望愛文教基金會

4-1-3　一階遞迴式

定理證明或說明

1. 常見一階遞迴關係

常見的兩種遞迴關係式如下，具有遞迴關係式的數列稱為遞迴數列。

(1) 等差數列：$a_k - a_{k-1} = d$（後項 a_k 減去前項 a_{k-1} 的差值為固定值 d）

(2) 等比數列：$\dfrac{a_k}{a_{k-1}} = r$（後項 a_k 除以前項 a_{k-1} 的比值為固定值 r）

2. 一階遞迴關係解題步驟

當我們面對遞迴數列問題時，一般而言，求解過程可分為下列兩個步驟：

(1) 根據問題條件(或情境)的關係式先寫出一個數列 $\langle a_k \rangle$，此時，可以多列出幾項觀察項與項之間的關係。

(2) 建立相鄰項之間的遞迴關係式，盡量與項數結合。（相鄰項可能是相鄰兩項或三項）

這種解題過程稱為遞迴方法。

注意事項

1. 常見遞迴關係式(等差與等比要馬上觀察出來)

2. 多列幾項觀察規律性時，請避免計算錯誤，導致影響觀察結果。

3. 計算求解時，若跟項數有關者，請先保留計算過程，請勿急於合併求解，導致不易觀察與項數間的關係。

關鍵字

遞迴數列、遞迴方法、等差數列、等比數列

例題 1

設數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=\frac{1}{4}$且$a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n$，n是任意自然數，試求：

(1) a_2,a_3,a_4,a_5；(2)試推測第n項a_n（以n表示）

Ans：

(1) $a_2=\frac{5}{4}\times a_1=\frac{5}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$　　發現$a_2=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^1$

$a_3=\frac{5}{4}\times a_2=\frac{5}{4}\times\frac{5}{16}=\frac{25}{64}$　　發現$a_3=\frac{25}{64}=\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^2$

$a_4=\frac{5}{4}\times a_3=\frac{5}{4}\times\frac{25}{64}=\frac{125}{256}$　　發現$a^4=\frac{125}{256}=\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^3$

$a_5=\frac{5}{4}\times a_4=\frac{5}{4}\times\frac{125}{256}=\frac{625}{1024}$　　發現$a_5=\frac{625}{1024}=\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^4$

(2) 由(1)我們可推測$a_n=\frac{1}{4}(\frac{5}{4})^{n-1}$，對於所有自然數$n$。

例題 2

數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=\frac{2}{3}$，$2a_{n+1}=-3a_n^2-a_n+2$，其中$n\in N$，則$a_{103}=?$

Ans：

依據遞迴關係式$2a_{n+1}=-3a_n^2-a_n+2$，列出多項觀察規律：

$$a_2=\frac{1}{2}[-3(\frac{2}{3})^2-(\frac{2}{3})+2]=0$$

$$a_3=\frac{1}{2}[-3\times0^2-0+2]=1$$

$$a_4=\frac{1}{2}[-3\times1^2-1+2]=-1$$

$$a_5=\frac{1}{2}[-3\times(-1)^2-(-1)+2]=0$$

$$a_6=\frac{1}{2}[-3\times0^2-0+2]=1$$

$$a_7=\frac{1}{2}[-3\times1^2-1+2]=-1$$

由上述結果，發現除了第 1 項外，

之後的各項為 $0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1,\cdots$

歸納出 $a_{3k}=1$， $a_{3k+1}=-1$， $a_{3k+2}=0$

而所求 $a_{103}=a_{3\times34+1}=-1$

例題 3

若一數列定義如下： $a_1=2$， $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$， $n\in N$，則此數列的一般項 a_n 為何？（請以 n 的形式表示）

Ans：

依據遞迴關係式 $a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$，列出多項觀察規律：

$$a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$a_5=2-\frac{1}{a_4}=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$$

從規律中，我們可以推測 $a_n=\dfrac{n+1}{n}$

（推測出結論後，如何確認是否正確？可用數學歸納法驗證）

例題 4

數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為 $a_1=1$， $n\in N$ 時， $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$，試求 a_n 之值。

Ans：

依據遞迴關係式 $a_{n+1}=a_n+(2n+1)$，列出多項觀察：

$$\cancel{a_2}=a_1+2\times1+1$$

$$\cancel{a_3}=\cancel{a_2}+2\times2+1$$

$$\cancel{a_4}=\cancel{a_3}+2\times3+1$$

$$\cancel{a_5}=\cancel{a_4}+2\times4+1$$

$$\vdots$$

$$\underline{+)a_n=\cancel{a_{n-1}}+2\times(n-1)+1}$$

$$a_n=a_1+2\times[1+2+3+\cdots+(n-1)]+1\times(n-1)$$

$$=1+2\times\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)$$

$$=1+n^2-n+n-1$$

$$=n^2$$

例題 5

數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_1=1$且$a_{n+1}=2a_n+1$，n為正整數，試求：

(1) a_2,a_3,a_4,a_5 (2)第n項a_n之值（以n表示）

Ans：

(1) 分別計算後可得

$$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$$

$$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$$

$$a_4=2a_3+1=2\times7+1=15$$

$$a_5=2a_4+1=2\times15+1=31$$

(2) 依據遞迴關係式$a_{n+1}=2a_n+1$，疊代寫出其關係：

$$a_n=2a_{n-1}+1$$

$$=2(2a_{n-2}+1)+1 \qquad \text{（其中 } a_{n-1}=2a_{n-2}+1\text{）}$$

$$=2^2a_{n-2}+2\times1+1$$

$$=2^2(2a_{n-3}+1)+2\times1+1 \qquad \text{（其中 } a_{n-2}=2a_{n-3}+1\text{）}$$

$$=2^3a_{n-3}+2^2\times1+2\times1+1$$

$$\cdots$$

$$=2^{n-1}a_1+2^{n-2}\times1+\cdots+2^2\times1+2\times1+1$$

$=2^{n-1}\times1+2^{n-2}\times1+\cdots+2^2\times1+2\times1+1$　　（代入 $a_1=1$）

$=2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2^2+2+2^0$

$=2^0+2+2^2+\cdots+2^{n-2}+2^{n-1}$（轉成首項為 2^0，公比為 2，較易計算）

$$=\frac{2^0(2^n-1)}{2-1}$$

$=2^n-1$

例題 6

平面上 n 條直線，任兩條不平行，任三條不共點，此 n 條直線將平面分割成 a_n 個區域，試求：

(1) 求 a_1,a_2,a_3,a_4

(2) 寫出 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式

(3) 求第 n 項 a_n 之值（以 n 表示）

Ans：

(1) 平面上 1 條直線，可將平面分割成 a_1 個區域，得 $a_1=2$

在任兩條不平行，任三條不共點下

平面上 2 條直線，可將平面分割成 a_2 個區域，得 $a_2=a_1+2=4$

平面上 3 條直線，可將平面分割成 a_3 個區域，得 $a_3=a_2+3=7$

平面上 4 條直線，可將平面分割成 a_4 個區域，得 $a_4=a_3+4=11$

(2) 由(1)之規律觀察，可發現 $\langle a_n\rangle$ 遞迴關係式為 $a_n=a_{n-1}+n$

(3) 由(2)之結論推導第 n 項 a_n 之值

$$\begin{aligned}
\cancel{a_2}&=a_1+2\\
\cancel{a_3}&=\cancel{a_2}+3\\
\cancel{a_4}&=\cancel{a_3}+4\\
\cancel{a_5}&=\cancel{a_4}+5\\
&\vdots\\
+)\,a_n&=\cancel{a_{n-1}}+n\\
\hline
a_n&=a_1+[2+3+\cdots+(n-1)+n]
\end{aligned}$$

$=2+\dfrac{(2+n)(n-1)}{2}$

$=\dfrac{4+n^2+n-2}{2}$

$=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

推得 $a_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}$

溫故知新

習題 1

試求首項為 5，公差為 7 的等差數列之遞迴關係式。

習題 2

數列 $<a_n>$，滿足 $a_1=-4$，$a_{n+1}=-2-\dfrac{1}{1+a_n}$，則 $a_{2014}=?$

習題 3

設數列 $<a_n>$ 的首項 $a_1=1$ 且滿足遞迴關係式 $a_{n+1}=a_n+(3n+1)$，$n\in N$，試求：

(1) a_2,a_3,a_4,a_5 (2) 一般項 a_n（請以 n 表示）

習題 4

設數列 $<a_n>$ 滿足下列條件 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+(n+1)^3$，$n\in N$，求此數列的一般項 a_n。

習題 5

平面上有 n 個圓，其中任三個圓均不共點，此 n 個圓最多可將平面分割成 a_n 個區域，則：

(1) 求 a_1,a_2,a_3,a_4 (2)寫出 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式 (3) 求第 n 項 a_n（以 n 表示）

習題 6 【指考乙 92】

若數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=\dfrac{1}{7}$，$a_2=\dfrac{3}{7}$及$a_{n+1}=\dfrac{7}{2}a_n(1-a_n)$，$n\geq 1$，則$a_{101}-a_{100}=?$

解答與解析

習題 1：$a_1=5$，$a_{n+1}-a_n=7\ \ (n\geq 1)$

習題 2：-4

習題 3：(1) $a_2=5, a_3=12, a_4=22, a_5=35$ (2) $a_n=\dfrac{3n^2-n}{2}$

習題 4：$a_n=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$

習題 5：(1) $a_1=2, a_2=4, a_3=8, a_4=14$ (2) $a_{n+1}=a_n+2n$ (3) $a_n=n^2-n+2$

習題 6：$a_3=\dfrac{7}{2}a_2(1-a_2)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{6}{7}$

$a_4=\dfrac{7}{2}a_3(1-a_3)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{7}$

$a_5=\dfrac{7}{2}a_4(1-a_4)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{6}{7}$

$a_6=\dfrac{7}{2}a_5(1-a_5)=\dfrac{7}{2}\times\dfrac{6}{7}\times\dfrac{1}{7}=\dfrac{3}{7}$

可觀察出，從第 3 項之後，奇數項為$\dfrac{6}{7}$，偶數項為$\dfrac{3}{7}$

因此，$a_{101}-a_{100}=\dfrac{6}{7}-\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{7}$