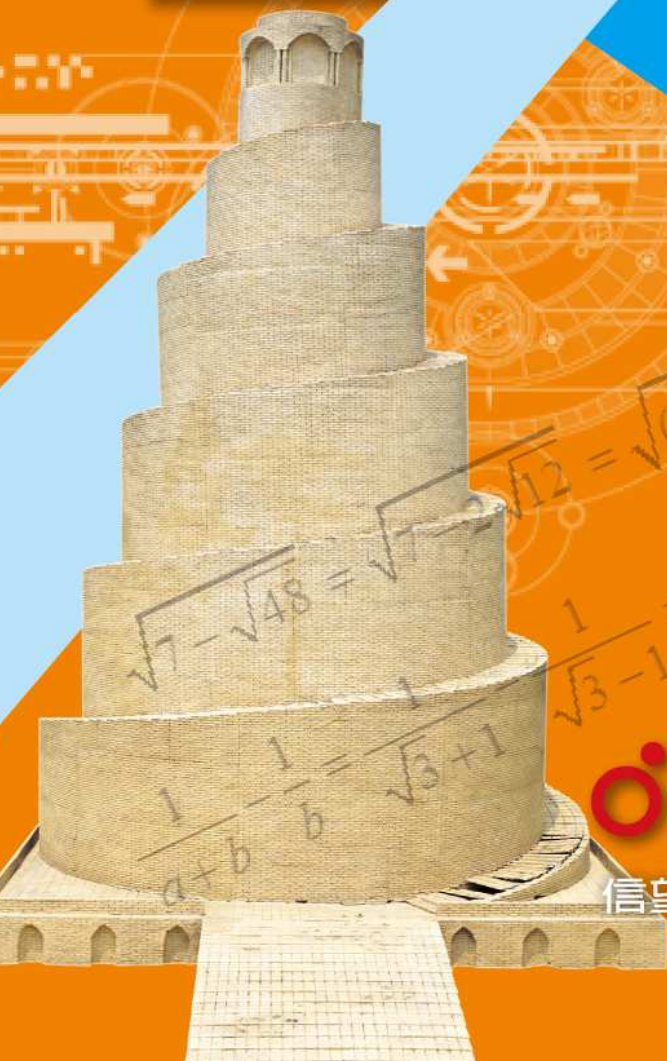


數學 1 進階講義

勘根定理

景美女中 · 林哲安老師



信望愛文教基金會

@ 3/4



2-3-10 勘根定理

定理敘述

設 $f(x)=0$ 是一個實係數多項式方程式，而 a 與 b 是兩個相異實數。

如果 $f(a)f(b)<0$ ，則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少有一個實根。

定理證明或說明

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間有奇數個實根。
2. $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，則 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間有偶數個實根（含 0 個實根）。

注意事項

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間至少有一個實根。
2. $f(a) \cdot f(b) > 0$ ，則方程式 $f(x)=0$ 在 a 與 b 之間不一定有實根。

關鍵字

實係數方程式

例題 1

已知方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ ，試求：

- (1) 在哪些連續整數之間有實根？
- (2) 承(1)，此方程式有兩個正根，試求較小的正根最接近的整數。

Ans :

(1) 令 $f(x) = x^3 - 3x + 1$,

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

在-2與-1、0與1、1與2之間有實根。

(2) 此方程式的正根介於0與1之間，將0與1之間細分出 $\frac{1}{2}$ 。

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} + 1 = -\frac{3}{8} , \text{ 則 } f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(0) < 0 , \text{ 故此較小正根最接近於 } 0 .$$

例題 2

三次方程式 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ 在下列哪些連續整數之間有實根？

(1) -2與-1之間 (2) -1與0之間 (3) 0與1之間 (4) 1與2之間 (5) 2與3之間。

Ans :

設 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$, 經過計算

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	-1	-1	7	29	8

因為 $f(-2)f(-1) = -1 < 0$, $f(-1)f(0) = -1 < 0$, $f(1)f(2) = -7 < 0$,

所以在-2與-1, -1與0及1與2之間有實根。故選(1)(2)(4)。

例題 3

設 $x^3 - 3x^2 - 4x + 8 = 0$ 的各根分別在兩個連續整數 n 與 $n+1$ 之間，試求 n 值。

Ans :

設 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 8$, 則

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-4	8	8	2	-4	-4	8

所以 $n = -2$ 、 $n = 1$ 、 $n = 3$

例題 4

有關方程式 $x^3 - 7x^2 + 3x + 7 = 0$ 的根，下列各選項何者正確？

- (1) -1 與 0 之間有實根 (2) 0 與 1 之間有實根
(3) 1 與 2 之間有實根 (4) 有一正根與兩負根
(5) 有兩正根與一負根。

Ans :

設 $f(x) = x^3 - 7x^2 + 3x + 7$ ，則

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	-35	-4	7	4	-7	-20	-29	-28	-11	28

因為 $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ， $f(1) \cdot f(2) < 0$ ， $f(6) \cdot f(7) < 0$

所以在 -1 與 0，1 與 2 及 6 與 7 之間有實根。故選(1)(3)(5)。

例題 5

設方程式 $x^3 - x^2 + x - k = 0$ 在 1 與 2 間有奇數個實根，則實數 k 的範圍為，試求 k 的範圍為何？

Ans :

$$1 < k < 6$$

$$f(1) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow (1-1+1-k)(8-4+2-k) < 0$$

$$\Rightarrow (1-k)(6-k) < 0 \Rightarrow (k-1)(k-6) < 0$$

$$\text{情況 1 } \begin{cases} k-1 > 0 \\ k-6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \\ k < 6 \end{cases} \Rightarrow 1 < k < 6$$

$$\text{情況 2 } \begin{cases} k-1 < 0 \\ k-6 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k < 1 \\ k > 6 \end{cases} \Rightarrow \text{無解}$$

例題 6

設 $f(x)$ 為四次實係數多項式，已知 $f(x)$ 值之正負如下表，且 $f(1-i)=0$ ，

下列敘述何者正確？

x	小於-4	-3	-2	-1	0
$f(x)$ 值	-	-	-	-	+

- (1) 方程式 $f(x)=0$ 在 -1 與 0 之間恰有一個實根。
- (2) 方程式 $f(x)=0$ 恰有一個負根。
- (3) 方程式 $f(x)=0$ 恰有三個負根。
- (4) 方程式 $f(x)=0$ 恰有一個正根。
- (5) 方程式 $f(x)=0$ 恰有兩個正根。

Ans :

因為 $f(1-i)=0$ ， $f(x)$ 為實係數多項式，所以 $1+i$ 為 $f(x)=0$ 之另一根

又 $f(-1) \cdot f(0) < 0$ ，所以在 -1 與 0 之間存在奇數個根。

因為 $f(-1) \cdot f(-2) < 0$ ，故在 -2 與 -1 之間若有實根必為兩個以上之偶數個

但 -1 與 0 之間已有一實根，故在 -2 與 -1 之間無實根。同理，在 $(-3, -2)$ $(-4, -3)$ $(-\infty, -4)$ 皆無實根，亦即第四根不為負根，故第四根為正根

$\Rightarrow f(x)=0$ 恰有一負根、一正根

故選(1)(2)(4)



習題 1

方程式 $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 2 = 0$ 實根分別介於哪兩個連續整數之間？

- (1) -2 與 -1 (2) -1 與 0 (3) 0 與 1 (4) 1 與 2 (5) 2 與 3。

習題 2

設 $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 3$ ， n 為整數。已知 $y = f(x)$ 的圖形在 $(n, 0)$ 與 $(n+1, 0)$ 之間與 x 軸有一交點，試求 n 值。

習題 3

已知 $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ 恰有一根在 0 與 4 之間，試求與此根最接近的整數。

習題 4

關於 $x^3 - 3x^2 - 2x + \sqrt{23} = 0$ 之根下列何者為真？

- (1) 三實根 (2) 一實二虛根 (3) 一負二正根 (4) 二負一正根 (5) 三正根。

習題 5

方程式 $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ 在區間 $(-3, -2)$ ， $(1, 2)$ ， $(4, 5)$ 中均恰有一個實根，試求滿足的 m 範圍。

習題 6

【指考乙 89】

關於多項式 $f(x) = x^4 - 15$ ，下列選項哪些為真？（多選）

- (1) $f(x) = 0$ 在 1 與 2 之間有一實根 (2) $f(x) = 0$ 在 -2 與 -1 之間有一實根
(3) $f(x) = 0$ 沒有大於 2 的實根 (4) $f(x) = 0$ 沒有小於 -2 的實根
(5) $f(x) = 0$ 有四個實根

習題 7

【學測補 91】

方程式 $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$ 有多少個實根？

- (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3 (5) 4

習題 8

【學測補 92】

關於三次多項式 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ ，試問下列哪些敘述是正確的？（多選）

- (1) $f(x) = 0$ 有實根落在 0 與 1 之間 (2) $f(x) = 0$ 有實根大於 1
(3) $f(x) = 0$ 有實根小於 -1 (4) $f(x) = 0$ 有實根也有虛根
(5) $f(x) = 10$ 有實根

設 $f(x)$ 為一實係數三次多項式且最高次項係數為 1，已知 $f(1)=1$ ， $f(2)=2$ ， $f(5)=5$ ，則 $f(x)=0$ 在下列哪些區間必定有實根？（多選）

(1) $(-\infty, 0)$ (2) $(0, 1)$ (3) $(1, 2)$ (4) $(2, 5)$ (5) $(5, \infty)$



解答與解析

習題 1：(1)(3)(4)

習題 2： $n = -2$ 、 $n = 0$ 、 $n = 1$ 。

習題 3：最接近的整數為 1

習題 4：(1)(3)

習題 5： $11 < m < 20$

習題 6：(1)(2)(3)(4)

習題 7：(3)

習題 8：(1)(2)(5)

習題 9：(2)(4)