

高中數學

進階
講義

一次聯立方程組與矩陣

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\div$

lt99ok431 一次聯立方程式與矩陣

主題一、一次聯立方程式的矩陣表示法

1. 矩陣：

將數字排列成一個矩形陣列，再用一對括號把它們圍起來，稱為矩陣，而矩陣中的每一個數稱為該矩陣的元。

例如：

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

← 第一列
← 第二列
← 第三列

↑ ↑ ↑ ↑
第一行 第二行 第三行 第四行

在矩形陣列中，橫的稱為列（由上至下編號），直的稱為行（由左至右編號），例如上面的矩陣有 3 列 4 行。

2. 增廣矩陣：

將一次聯立方程式 $L: \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \\ 3x + 5y + 9z = 5 \end{cases}$ 的係數依序列出來所構成的矩陣

稱為 L 的係數矩陣；將 L 的係數及常數項依序列出來所構成的矩陣稱為 L 的增廣矩陣。

聯立方程式	係數矩陣	增廣矩陣
例如： $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \\ 3x + 5y + 9z = 5 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

【例題 1】【配合課本內文】

已知一個三元一次聯立方程式所含未知數的順序依次為 x , y , z ,

且其增廣矩陣為 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, 寫出此聯立方程式。

$$\text{Ans : } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = 5 \end{cases}$$

【詳解】

根據增廣矩陣的定義,

$$\text{得此聯立方程式為 } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = 5 \end{cases}.$$

【類題 1】

寫出聯立方程式 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 9 \\ -x + 3y = -4 \\ 2x - 5y + 5z = 17 \end{cases}$ 的係數矩陣與增廣矩陣。

$$\text{Ans : 係數矩陣 } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}; \text{ 增廣矩陣 } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

【詳解】

$$\text{係數矩陣為 } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{增廣矩陣為 } \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}.$$

主題二、一次聯立方程式與矩陣的列運算

1. 矩陣的列運算：

- (1) 將矩陣中的某兩列互換位置．
- (2) 將矩陣中的某一行乘以一個不為 0 的數．
- (3) 將矩陣中的某一行乘以一個數後再加入到另一列．

2. 高斯消去法解聯立方程式的步驟：

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

3. 高斯-喬登消去法：將增廣矩陣作列運算，若可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix},$$

則聯立方程式的解為 $x=a$ ， $y=b$ ， $z=c$ ．

【例題 2】【配合課本例 1】

利用高斯消去法解聯立方程式
$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 9z = 5 \end{cases} .$$

Ans : $x=3, y=1, z=-1$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一、二列互換}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{array} \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xleftarrow{\times(-\frac{1}{3})} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

因為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 對應的聯立方程式為
$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 & \text{①} \\ y + z = 0 & \text{②} , \\ z = -1 & \text{③} \end{cases}$$

將 $z = -1$ 代入②式解得 $y = 1$,

再將 $y = 1, z = -1$ 代入①式解得 $x = 3$,

即此聯立方程式的解為 $(x, y, z) = (3, 1, -1)$.

【類題 2】

利用高斯消去法解聯立方程式
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - 2y - 9z = -5 \end{cases} .$$

Ans : $x=2, y=1, z=1$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一、二列互換}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & -9 & -5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\times(-2)} \\ \xrightarrow{\times(-3)} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{二、三列互換}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & -11 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-5)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & -11 \\ 0 & 0 & 27 & 53 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{27}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

因為矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -12 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 對應的聯立方程式為 $\begin{cases} x - y + z = 2 & \text{①} \\ y - 12z = -11 & \text{②} \\ z = 1 & \text{③} \end{cases}$,

將 $z=1$ 代入②式解得 $y=1$,

再將 $y=1, z=1$ 代入①式解得 $x=2$,

即此聯立方程式的解為 $(x, y, z) = (2, 1, 1)$.

【例題 3】【配合課本例 2】

解聯立方程式 $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ x - 3y = -5 \\ 2x - 5y + 5z = 3 \end{cases}$.

Ans : $x=4, y=3, z=2$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-2) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 2 \\ \times 1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-9) \\ \times(-3) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

故聯立方程式的解為 $x=4, y=3, z=2$.

【類題 3】

解聯立方程式 $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + 7z = 5 \\ 2x - y + 5z = 2 \end{cases}$.

Ans : $x=5, y=3, z=-1$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-3) \\ \times(-2)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times 1 \\ \times(-1)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times(-3)}} \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

故聯立方程式的解為 $x=5, y=3, z=-1$.

【例題 4】【配合課本例 3】

解聯立方程式
$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 3x-y+2z=1 \\ 7x-4y+5z=4 \end{cases}$$

Ans : 無解

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-3) \\ \times(-7)}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & -8 \\ 0 & 10 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-2)} \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

得知原聯立方程式與
$$\begin{cases} x-2y+z=3 & \text{①} \\ 0x+5y-z=-8 & \text{②} \\ 0x+0y+0z=-1 & \text{③} \end{cases}$$
 有相同的解 .

因為沒有任何實數能滿足③式，所以原聯立方程式無解 .

【類題 4】

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y - z = 3 \end{cases}.$$

Ans：無解

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times(-3)}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{得知原聯立方程式與} \begin{cases} x + y - z = 5 & \text{①} \\ 0x + y + 2z = -9 & \text{②} \\ 0x + 0y + 0z = -3 & \text{③} \end{cases} \text{有相同的解。}$$

因為沒有任何實數能滿足③式，所以原聯立方程式無解。

【例題 5】【配合課本例 4】

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x + 2y + z = 7 \\ 7x + 8y + z = 31 \end{cases}.$$

$$\text{Ans：} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \text{ 為任意實數})$$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 7 & 8 & 1 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{一、二列互換}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 31 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times(-7)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & -6 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -6 & -18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times 6}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得知原聯立方程式與 $\begin{cases} x-z=1 \\ y+z=3 \end{cases}$ 有相同的解。

如果令 $z=t$ ，那麼聯立方程式有無限多組解，

且其解為 $\begin{cases} x=1+t \\ y=3-t \\ z=t \end{cases}$ (t 為任意實數)。

【類題 5】

解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+3z=7 \\ x+7y-6z=-4 \end{cases}$ 。

Ans : $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$ (t 為任意實數)

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-1) \\ \times(-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-5) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得知原聯立方程式與 $\begin{cases} x+z=3 \\ y-z=-1 \end{cases}$ 有相同的解。

如果令 $z=t$ ，那麼聯立方程式有無限多組解，

且其解為 $\begin{cases} x=3-t \\ y=-1+t \\ z=t \end{cases}$ (t 為任意實數)。

【例題 6】【配合課本例 5】

試就實數 a 的值，討論下述聯立方程式的解： $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2x-y-z=4 \\ 5x+7y+2z=a \end{cases}$ 。

Ans : $a \neq 1$ 時，無解； $a = 1$ 時 $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$ (t 為任意實數)

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 2 & a \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times(-5)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3a+5 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-\frac{1}{3})} \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 3a+5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times 3}} \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

因此，原聯立方程式與 $\begin{cases} x+0y-z=3 & \text{①} \\ 0x+y+z=-2 & \text{②} \\ 0x+0y+0z=a-1 & \text{③} \end{cases}$ 有相同的解。

- (1) 當 $a \neq 1$ 時，沒有任何實數能滿足③式，原聯立方程式無解。
 (2) 當 $a = 1$ 時，因為任何實數都能滿足③式，所以③式可以捨棄，

成為 $\begin{cases} x-z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$ 。

令 $z = t$ ，則聯立方程式的解為

$$\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \quad (t \text{ 為任意實數}) \\ z=t \end{cases}$$

也就是說，此聯立方程式有無限多組解。

【類題 6】

設 k 為實數，且聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+z=-1 \\ x-2y-3z=1 \\ 3x+2y-z=k \end{cases}$ 有解，求實數 k 的值。

Ans : -1

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & k \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-1) \\ \times(-3)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -4 & k+3 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}.$$

因為原聯立方程式有解，

所以 $k+1=0$ ，解得 $k=-1$ 。

【例題 7】 【常考題】

設 a, b, c 為實數，下列有關聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+az=1 \\ 3x+4y+bz=-1 \\ 2x+10y+7z=c \end{cases}$ 的敘述哪些是正確的？

(1) 若此聯立方程式有解，則必定恰有一組解。

(2) 若此聯立方程式有解，則 $11a-3b \neq 7$ 。

(3) 若此聯立方程式有解，則 $c=14$ 。

(4) 若此聯立方程式無解，則 $11a-3b=7$ 。

(5) 若此聯立方程式無解，則 $c \neq 14$ 。 **【98 學測】**

Ans：

【詳解】

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 4 & b \\ 2 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 28 + 30a + 4b - 8a - 42 - 10b = 22a - 6b - 14,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 10 & c \end{vmatrix} = 4c + 30 - 4 - 8 - 6c + 10 = 28 - 2c,$$

(A) 若此線性方程組有解，

則可能恰有一組解或無限多解。

(B)(C) 若此線性方程組有解，

則 $11a-3b \neq 7$ 或 $(11a-3b=7, c=14)$ 。

(D) 若此線性方程組無解，則 $\Delta=0$ ，

即 $11a-3b=7$ 。

(E) 若此線性方程組無解，

則 $\Delta=0, \Delta_z \neq 0$ ，即 $c \neq 14$ 。

【類題 7】

已知聯立方程式 $\begin{cases} x+y-z=a \\ 2x+3y-4z=7 \\ x-2y+5z=3-a \end{cases}$ 有解，求實數 a 的值。

Ans : 3

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & 3-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -2 & 7-a \\ 0 & -3 & 6 & 3-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) \\ \times 3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a-7 \\ 0 & 1 & -2 & 7-a \\ 0 & 0 & 0 & 2-4a \end{bmatrix}$$

因為原聯立方程式有解，

所以 $24-8a=0$ ，解得 $a=3$ 。

【例題 8】 【常考題】

對矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{bmatrix}$ 作列運算若干次後得到 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 a, b 的值。【98 指甲】

Ans : (13, 10)

【詳解】

增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 所代表的方程組為

$$\begin{cases} x+0y=1 \\ 0x+y=1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

將它代入增廣矩陣 $\begin{bmatrix} 4 & 9 & a \\ 3 & 7 & b \end{bmatrix}$ 所代表的方程組

$$\begin{cases} 4x+9y=a \\ 3x+7y=b \end{cases} \text{ 中, 可得 } (a, b) = (13, 10).$$

【類題 8】

已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ 經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$ ，求 a, b 的值。Ans : $a=-2, b=2$

【詳解】

$$\text{因為 } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

所以 $a = -2$, $b = 2$.

重要精選考題

基礎題

1. 利用矩陣的列運算，求聯立方程式 $\begin{cases} x+2y-2z=-3 \\ 3x-y+4z=14 \\ 2x+3y-z=2 \end{cases}$ 的解。

Ans : $x=1, y=1, z=3$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 14 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-3) \\ \times(-2)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & 10 & 23 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-8)} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -7 & 10 & 23 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right] \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -14 & -41 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times 1}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 26 & 79 \\ 0 & 1 & -14 & -41 \\ 0 & 0 & -11 & -33 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-\frac{1}{11})} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 26 & 79 \\ 0 & 1 & -14 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
 & \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 26 & 79 \\ 0 & 1 & -14 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-26) \\ \times 14}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

故聯立方程式的解為 $x=1, y=1, z=3$ 。

2. 利用矩陣的列運算，求聯立方程式 $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ 2x-y+2z=1 \\ 5x-3y+6z=6 \end{cases}$ 的解。

Ans : $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7+2t \text{ (} t \text{ 為任意實數)} \\ z=t \end{cases}$

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 6 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{\times(-2) \\ \times(-5)}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & -14 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{\times 1} \\ \xleftarrow{\times (-2)} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得知原聯立方程式與 $\begin{cases} x = -3 \\ y - 2z = -7 \\ 0 = 0 \end{cases}$ 有相同的解。

如果令 $z = t$ ，那麼聯立方程式有無限多組解，

且其解為 $\begin{cases} x = -3 \\ y = -7 + 2t \text{ (} t \text{ 為任意實數)} \\ z = t \end{cases}$ 。

3. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & a & 17 \\ 6 & 5 & 8 & b \end{bmatrix}$ 經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，求實數 a, b 的值。

Ans : $a=5, b=32$

【詳解】

將矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & a & 17 \\ 6 & 5 & 8 & b \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{\times (-3)} \\ \xleftarrow{\times (-6)} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & a-3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & b-30 \end{bmatrix}$$

因為可化成第三列全為 0 的矩陣，所以 $\frac{-1}{-1} = \frac{a-3}{2} = \frac{2}{b-30}$ ，

解得 $a=5, b=32$ 。

4. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ 2x+3y+4z=-4 \\ 3x+4y+5z=a \end{cases}$ 有解，求實數 a 的值。

Ans : -7

【詳解】

將其增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & 5 & a \end{bmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{\times (-2)} \\ \xleftarrow{\times (-3)} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & a+3 \end{bmatrix} \xleftarrow{\times (-2)}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a+7 \end{bmatrix}.$$

因為聯立方程式有解，

所以 $a+7=0$ ，解得 $a=-7$ 。

5. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$?

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

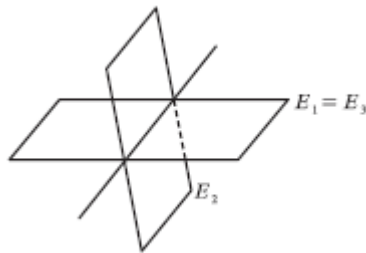
【96 學測】

Ans : (1)(5)

【詳解】

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

表 $x=2$ ， $y=1$ ， $z=1$ 為方程組的唯一解。



進階題

6. 已知聯立方程式 $\begin{cases} 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \\ 4x+7y-3z=9 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & a & 3 \\ 0 & 1 & b & -1 \\ 0 & 0 & c & 9 \end{bmatrix}$ ，

求實數 a ， b ， c 的值。

Ans : $a=2$ ， $b=-1$ ， $c=3$

【詳解】

$$\text{令} \begin{cases} 2x+4y-3z=1 & \text{①} \\ 3x+6y-5z=0 & \text{②} \\ 4x+7y-3z=9 & \text{③} \end{cases}.$$

由①×3−②×2得 $z=3$. ④

由①×2−③得 $y-3z=-7$. ⑤

再由④，⑤解得 $y=2$ ， $z=3$ ，

代入①式解得 $x=1$ ．

因此， $x=1$ ， $y=2$ ， $z=3$

$$\text{也是矩陣所對應之聯立方程式} \begin{cases} x-2y+az=3 \\ y+bz=-1 \\ cz=9 \end{cases} \text{的解.}$$

$$\text{將解代入聯立方程式得} \begin{cases} 1-4+3a=3 \\ 2+3b=-1, \\ 3c=9 \end{cases}$$

解得 $a=2$ ， $b=-1$ ， $c=3$ ．

7. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x+y-2z=-1 \\ x-2y+z=0 \\ 5x-y-4z=2 \end{cases}$ 的增廣矩陣經過列運算後，得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & a & 15 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \text{ 求實數 } a \text{ 的值.}$$

Ans : -15

【詳解】

將聯立方程式的增廣矩陣作列運算：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{R}_2 - \text{R}_1 \\ \text{R}_3 - 5\text{R}_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{R}_2 \times (-1) \\ \text{R}_3 \times (-1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & -6 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \text{R}_3 - 2\text{R}_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

得知 $a=-15$ ．

8. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 14 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 經過列運算後，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ ，求實數 a, b, c 的值。

Ans : $a=1, b=1, c=3$

【詳解】

$$\text{由題意知，聯立方程式} \begin{cases} x+2y-2z=-3 & \text{①} \\ 3x-y+4z=14 & \text{②} \\ 2x+3y-z=2 & \text{③} \end{cases}$$

恰有一組解 $x=a, y=b, z=c$ 。

$$\text{由①} \times 2 + \text{②} \text{得 } 5x+3y=8 \quad \text{④}$$

$$\text{由②} + \text{③} \times 4 \text{得 } 11x+11y=22 \quad \text{⑤}$$

再由④，⑤解得 $x=1, y=1$ ，

代入①式解得 $z=3$ 。

故 $a=1, b=1, c=3$ 。