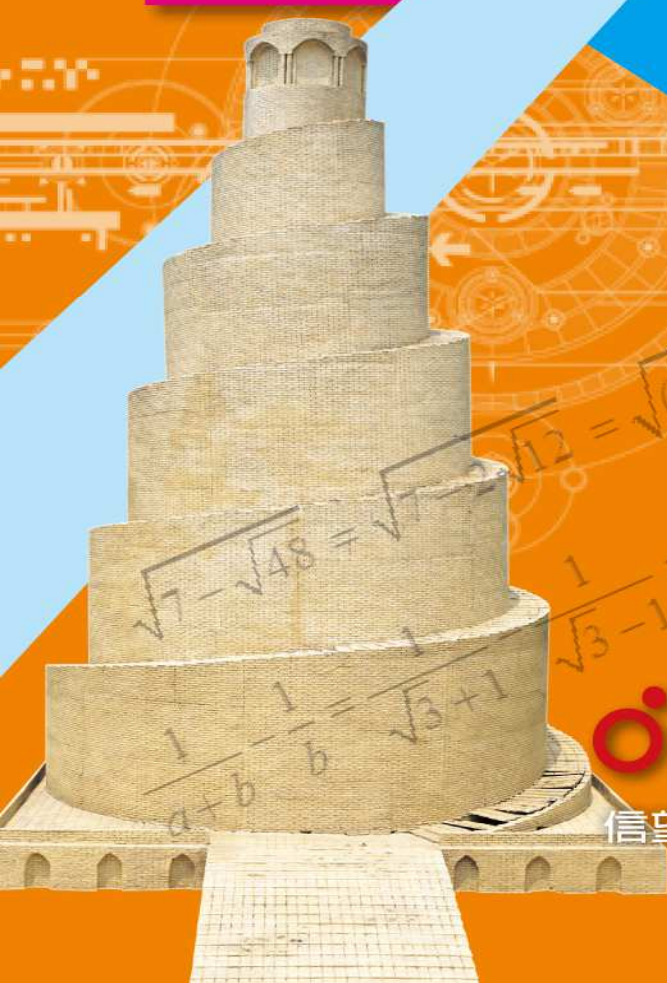


高中數學

進階
講義

面積與二階行列式

陳清海 老師



信望愛文教基金會

ok334 面積與二階行列式

主題一、二階行列式

1. 二階行列式：

符號 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 稱為二階行列式，它所代表的數為 $ad - bc$ ，

即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ 。

2. 二階行列式具有下列性質：

(1) 行列互換其值不變，如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

(2) 兩行（兩列）對調，其值變號，如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

(3) 任一行（列）可以提出同一個數，如

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(4) 兩行（兩列）成比例，其值為 0，如

$$\begin{vmatrix} a & ka \\ c & kc \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

(5) 將一行（列）的 k 倍加到另一行（列），其值不變，如

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(6) 若某一行（列）的每個元素可分成兩行（列）元素的和，則此行列式可拆分為兩個行列式的和，如

$$\begin{vmatrix} a+e & b \\ c+f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a+e & b+f \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ c & d \end{vmatrix}.$$

3. 兩向量平行的判定：

設 $\vec{a} = (x_1, y_1)$ 與 $\vec{b} = (x_2, y_2)$ 為坐標平面上任意兩個向量。

若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$ ；反之亦成立

【例題 1】

求二階行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 29

【詳解】

所求 $= 2 \times 7 - 3 \times (-5) = 29$ 。

【備註】

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 29$$

【類題 1】

求二階行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 10

【詳解】

所求 $= 3 \times 4 - (-2) \times (-1) = 10$ 。

【備註】

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 10$$

【例題 2】

求行列式 $\begin{vmatrix} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 13

【詳解】

利用行列式的性質，得

$$\begin{vmatrix} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 35 & 53 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 13 \times (4 - 3) = 13。$$

【備註】

$$\begin{array}{cc} 26 & 39 \\ 35 & 53 \end{array} \quad \boxed{13}$$

【類題 2】

求行列式 $\begin{vmatrix} 456 & 455 \\ 789 & 788 \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 333

【詳解】

利用行列式的性質，得

$$\begin{vmatrix} 456 & 455 \\ 789 & 788 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 455 \\ 1 & 788 \end{vmatrix} = 788 - 455 = 333 .$$

【備註】

$$\begin{array}{cc} 456 & 455 \\ 789 & 788 \end{array} \quad \boxed{333}$$

【例題 3】

已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a+5b & 3a-4b \\ 2c+5d & 3c-4d \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : -46

【詳解】

利用二階行列式的性質，得

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2a+5b & 3a-4b \\ 2c+5d & 3c-4d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2a & 3a-4b \\ 2c & 3c-4d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5b & 3a-4b \\ 5d & 3c-4d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2a & -4b \\ 2c & -4d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5b & 3a \\ 5d & 3c \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-4) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 5 \cdot 3 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \\ &= (-8) \cdot 2 + 15 \cdot (-2) \\ &= -46 . \end{aligned}$$

【類題 3】

已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ ，求 $\begin{vmatrix} 2a-b & 4a+3b \\ 2c-d & 4c+3d \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 50

【詳解】

利用二階行列式的性質，得

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 2a-b & 4a+3b \\ 2c-d & 4c+3d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2a & 4a+3b \\ 2c & 4c+3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 4a+3b \\ -d & 4c+3d \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & 4a \\ -d & 4c \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \\
 &= 6 \cdot 5 + (-4) \cdot (-5) \\
 &= 50 .
 \end{aligned}$$

【例題 4】

已知 $\vec{a} = (-4, 3)$ 與 $\vec{b} = (6, t)$ 平行，求實數 t 的值。

Ans : $-\frac{9}{2}$

【詳解】

因為 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，所以

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 6 & t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4t - 18 = 0 .$$

解得 $t = -\frac{9}{2}$ 。

【類題 4】

設 $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (-2, 5)$ 與 $\vec{c} = (1, t)$, 且 $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$,

求實數 t 的值 .

Ans : $\frac{1}{2}$

【詳解】

因為 $\vec{b} - \vec{c} = (-3, 5-t)$, 且 $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$, 所以

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5-t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(5-t) - 9 = 0 .$$

解得 $t = \frac{1}{2}$.

主題二、克拉瑪公式

1. 克拉瑪公式：

$$\text{設 } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

當 $\Delta \neq 0$ 時，二元一次聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

恰有一組解，且其解為 $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ ， $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ 。

【例題 5】

使用克拉瑪公式解聯立方程式 $\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$.

Ans : $x=2$, $y=-1$

【詳解】

因為

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -19, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -38, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 19,$$

所以

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-38}{-19} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{19}{-19} = -1.$$

【備註】

x	y		
2	5	-1	x= 1
3	-2	8	y= -1

【類題 5】

使用克拉瑪公式解聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x-5y=1 \end{cases}$.

Ans : $x=1$, $y=1$

【詳解】

因為

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = -28, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -28, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -28,$$

所以

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-28}{-28} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-28}{-28} = 1.$$

【備註】

x	y		
2	3	5	x= 1
6	-5	1	y= 1

【例題 6】

已知聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解為 $x = 4, y = 2$,

求聯立方程式 $\begin{cases} 2b_1x + (2a_1 - b_1)y + 3c_1 = 0 \\ 2b_2x + (2a_2 - b_2)y + 3c_2 = 0 \end{cases}$ 的解。

Ans : $x = -6, y = -6$

【詳解】

因為聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解，

由克拉瑪公式，得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

且滿足 $\frac{\Delta_x}{\Delta} = 4, \quad \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2$ 。

將所求聯立方程式改寫為 $\begin{cases} 2b_1x + (2a_1 - b_1)y = -3c_1 \\ 2b_2x + (2a_2 - b_2)y = -3c_2 \end{cases}$ ，則其

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2b_1 & 2a_1 - b_1 \\ 2b_2 & 2a_2 - b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2b_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & 2a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & -b_1 \\ 2b_2 & -b_2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + 0 = -4\Delta \neq 0,$$

$$\begin{aligned} \Delta'_x &= \begin{vmatrix} -3c_1 & 2a_1 - b_1 \\ -3c_2 & 2a_2 - b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3c_1 & 2a_1 \\ -3c_2 & 2a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3c_1 & -b_1 \\ -3c_2 & -b_2 \end{vmatrix} \\ &= -6 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 6\Delta_y + 3\Delta_x, \end{aligned}$$

$$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 2b_1 & -3c_1 \\ 2b_2 & -3c_2 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 6\Delta_x.$$

故所求聯立方程式的解為

$$x = \frac{\Delta'_x}{\Delta'} = \frac{6\Delta_y + 3\Delta_x}{-4\Delta} = \frac{6(2 \cdot \Delta) + 3(4 \cdot \Delta)}{-4\Delta} = -6,$$

$$y = \frac{\Delta'_y}{\Delta'} = \frac{6\Delta_x}{-4\Delta} = \frac{6(4 \cdot \Delta)}{-4\Delta} = -6.$$

【類題 6】

已知聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=2, y=5$,

求聯立方程式 $\begin{cases} 4a_1x - 5b_1y + 6c_1 = 0 \\ 4a_2x - 5b_2y + 6c_2 = 0 \end{cases}$ 的解。

Ans : $x=-3, y=6$

【詳解】

因為聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 恰有一組解，

由克拉瑪公式，得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

且滿足 $\frac{\Delta_x}{\Delta} = 2, \quad \frac{\Delta_y}{\Delta} = 5$ 。

將所求聯立方程式改寫為 $\begin{cases} 4a_1x - 5b_1y = -6c_1 \\ 4a_2x - 5b_2y = -6c_2 \end{cases}$ ，則其

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 4a_1 & -5b_1 \\ 4a_2 & -5b_2 \end{vmatrix} = 4 \times (-5) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -20\Delta \neq 0$$

$$\Delta'_x = \begin{vmatrix} -6c_1 & -5b_1 \\ -6c_2 & -5b_2 \end{vmatrix} = (-6) \times (-5) \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 30\Delta_x,$$

$$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 4a_1 & -6c_1 \\ 4a_2 & -6c_2 \end{vmatrix} = 4 \times (-6) \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -24\Delta_y.$$

故所求聯立方程式的解為

$$x = \frac{\Delta'_x}{\Delta'} = \frac{30\Delta_x}{-20\Delta} = -\frac{30}{20} \times 2 = -3,$$

$$y = \frac{\Delta'_y}{\Delta'} = \frac{-24\Delta_y}{-20\Delta} = \frac{-24}{-20} \times 5 = 6.$$

主題三、二元一次方程組的幾何意義

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(1) $\Delta \neq 0$, 即 $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ 兩直線交於一點 $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta})$ 。

(2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ 兩直線平行(無解)。

(3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ 兩直線重合(無限多解)。

【例題 7】

設聯立方程式 $\begin{cases} (1-k)x - 2y = 0 \\ 2x + (2+k)y = 0 \end{cases}$ 除了 $x=0, y=0$

之外還有其他的解，求實數 k 的值。

Ans : 2 或 -3

【詳解】

聯立方程式除了 $x=0, y=0$ 之外還有其他的解，
表示聯立方程式有無限多組解，因此 $\Delta=0$ ，

即 $\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & 2+k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6 = 0$ ，解得 $k=2$ 或 -3 。

【類題 7】

設聯立方程式 $\begin{cases} x+3y=kx \\ 5x+3y=ky \end{cases}$ 除了 $x=0, y=0$

之外還有其他的解，求實數 k 的值。

Ans : -2 或 6

【詳解】

將原聯立方程式改寫為 $\begin{cases} (1-k)x + 3y = 0 \\ 5x + (3-k)y = 0 \end{cases}$ 。

因為聯立方程式除了 $x=0$, $y=0$ 之外還有其他的解，
表示聯立方程式有無限多組解，所以 $\Delta=0$ ，

$$\text{即 } \begin{vmatrix} 1-k & 3 \\ 5 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 4k - 12 = 0,$$

解得 $k=-2$ 或 6 。

【例題 8】

試就實數 k 的值，討論聯立方程式

$$\begin{cases} (k+3)x + 4y = 5-3k \\ 2x + (k+5)y = 8 \end{cases} \text{ 的解。}$$

Ans：見詳解

【詳解】

計算二階行列式 Δ ， Δ_x 與 Δ_y ，得

$$\Delta = \begin{vmatrix} k+3 & 4 \\ 2 & k+5 \end{vmatrix} = k^2 + 8k + 7 = (k+1)(k+7),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5-3k & 4 \\ 8 & k+5 \end{vmatrix} = -3k^2 - 10k - 7 = -(3k+7)(k+1),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k+3 & 5-3k \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 14k + 14 = 14(k+1).$$

(1) 當 $k \neq -7$ 且 $k \neq -1$ 時，即 $\Delta \neq 0$ ，

聯立方程式恰有一組解

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-3k-7}{k+7}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{k+7}.$$

(2) 當 $k = -7$ 時，即 $\Delta = 0$ ，代入原聯立方程式，得

$$\begin{cases} -4x + 4y = 26 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}.$$

在坐標平面上這代表兩直線平行，

故聯立方程式無解。

(3) 當 $k = -1$ 時，即 $\Delta = 0$ ，代入原聯立方程式，得

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}.$$

在坐標平面上這代表兩直線重合，

故聯立方程式有無限多組解。

而聯立方程式的解就是 $x+2y=4$ 的解，

其解可寫為

$$\begin{cases} x=4-2t \\ y=t \end{cases}, \text{ 其中 } t \text{ 是實數。}$$

【類題 8】

試就實數 k 的值，討論聯立方程式

$$\begin{cases} kx + 3y = k + 3 \\ x + (k-2)y = 5 - k \end{cases} \text{ 的解。}$$

Ans：見詳解

【詳解】

計算二階行列式 Δ ， Δ_x 與 Δ_y ，得

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & k-2 \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} k+3 & 3 \\ 5-k & k-2 \end{vmatrix} = (k+3)(k-2) - 3(5-k) = (k-3)(k+7),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} k & k+3 \\ 1 & 5-k \end{vmatrix} = k(5-k) - (k+3) = -(k-3)(k-1).$$

(1) 當 $k \neq -1$ 且 $k \neq 3$ 時，即 $\Delta \neq 0$ ，

聯立方程式恰有一組解

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{k+7}{k+1}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-k+1}{k+1}.$$

(2) 當 $k = -1$ 時，即 $\Delta = 0$ ，代入原聯立方程式，

$$\text{得 } \begin{cases} -x + 3y = 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases}.$$

在坐標平面上這代表兩直線平行，

故聯立方程式無解。

(3) 當 $k = 3$ 時，即 $\Delta = 0$ ，代入原聯立方程式，

$$\text{得 } \begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

在坐標平面上這代表兩直線重合，

故聯立方程式有無限多組解。

而聯立方程式的解就是 $x+y=2$ 的解，

其解可寫為 $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \end{cases}$ ，其中 t 是實數。

主題四、二階行列式的應用

1. 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 不平行，則由

$\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 所夾的平行四邊形面積為

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}.$$

2. 由兩不平行向量 $\vec{u} = (a, b)$ 與 $\vec{v} = (c, d)$ 所張出的

平行四邊形面積為二階行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ 的絕對值，即 } \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|.$$

【例題 9】

求由向量 $\vec{u} = (-5, 1)$ 與 $\vec{v} = (2, 3)$ 所張出的平行四邊形面積。

Ans : 17

【詳解】

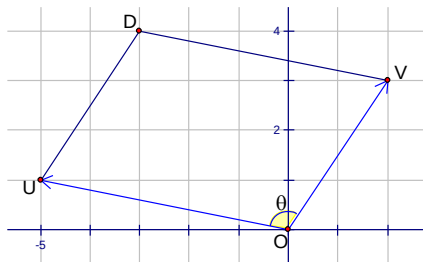
計算二階行列式的絕對值，得

$$\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = |-15 - 2| = |-17| = 17,$$

故由向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 所張出的平行四邊形面積為 17。

【另解】

$$\begin{aligned} & |\vec{u} \times \vec{v}| \\ &= \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \\ &= \sqrt{26 \times 13 - (-10 + 3)^2} = \sqrt{289} = 17. \end{aligned}$$

【又解】

如圖，

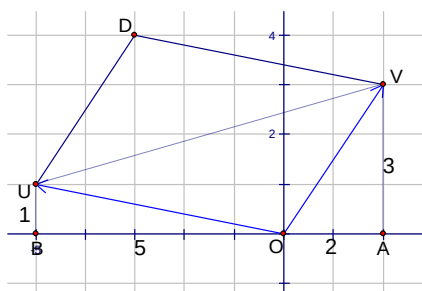
$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-10 + 3}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{-7}{13\sqrt{2}},$$

$$\text{得 } \sin \theta = \frac{17}{13\sqrt{2}},$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$

$$= \sqrt{26} \times \sqrt{13} \times \frac{17}{13\sqrt{2}} = 17.$$

【再解】



如圖，

面積

$$\begin{aligned}
 &= (\text{梯形 } ABVU - \text{三角形 } OBV - \text{三角形 } OAU) \times 2 \\
 &= 2 \times [(1+3) \times 7 \div 2 - 1 \times 5 \div 2 - 2 \times 3 \div 2] \\
 &= 17.
 \end{aligned}$$

【類題 9】

已知由向量 $\vec{u} = (4, 3)$ 與 $\vec{v} = (-2, k)$ 所張出的平行四邊形面積為 18，求實數 k 的值。

Ans : 3 或 -6

【詳解】

依題意，可列得

$$\left| \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & k \end{vmatrix} \right| = 18 \Rightarrow |4k + 6| = 18,$$

即 $4k + 6 = \pm 18$. 解得 $k = 3$ 或 -6 .

【例題 10】

已知 $\triangle ABC$ 三頂點坐標為 $A(-2, 1)$ ， $B(3, 2)$ 與 $C(-1, -2)$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。

Ans : 8

【詳解】

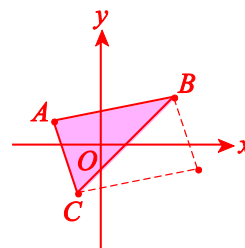
因為 $\vec{AB} = (5, 1)$ ， $\vec{AC} = (1, -3)$ ，

且 $\triangle ABC$ 的面積等於由

$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 所張出之平行四邊形面積的一半，

所以 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-16| = 8 .$$



【類題 10】

已知 $\triangle ABC$ 三頂點坐標為 $A(2,0)$ ， $B(-2,1)$ 與 $C(4,3)$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。

Ans : 7

【詳解】

因為 $\overrightarrow{AB} = (-4, 1)$ ， $\overrightarrow{AC} = (2, 3)$ ，所以 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-14| = 7 .$$

ok334ex

基礎題

1. 求下列各二階行列式的值：

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 990 & 991 \\ 992 & 993 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} \sqrt{2}+5\sqrt{3}+4 & 5\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+5\sqrt{3}-4 & \sqrt{2}-4 \end{vmatrix}.$$

Ans : (1) 26 , (2) -2 , (3) -89

【詳解】

$$(1) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \times 4 - (-2) \times 3 = 20 + 6 = 26.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 990 & 991 \\ 992 & 993 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 990 & 991 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 990 \times 2 - 992 \times 2 = -2.$$

$$\begin{aligned} (3) & \begin{vmatrix} \sqrt{2}+5\sqrt{3}+4 & 5\sqrt{3} \\ \sqrt{2}+5\sqrt{3}-4 & \sqrt{2}-4 \end{vmatrix} \\ &= (\sqrt{2}+5\sqrt{3}+4)(\sqrt{2}-4) - 5\sqrt{3}(\sqrt{2}+5\sqrt{3}-4) \\ &= 2 + 5\sqrt{6} + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 20\sqrt{3} - 16 - 5\sqrt{6} - 25 \times 3 + 20\sqrt{3} \\ &= -89. \end{aligned}$$

2. 已知 a, b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$,

則絕對值 $|a+b|$ 為何? 【99 學測】

Ans : 32

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35 - ab = 4 \Rightarrow ab = 31$$

$$\Rightarrow a = 31, b = 1 \text{ 或 } a = -31, b = -1$$

$$\Rightarrow a + b = 32.$$

3. 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = 5$, 求 $\begin{vmatrix} 3c-2e & 3d-2f \\ 4a & 4b \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 16

【詳解】

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3c-2e & 3d-2f \\ 4a & 4b \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3c & 3d \\ 4a & 4b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2e & -2f \\ 4a & 4b \end{vmatrix} \\ &= -4 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 4 \times 2 \times \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} \\ &= -12 \times 2 + 8 \times 5 \\ &= 16。 \end{aligned}$$

4. 已知 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$, 求 $\begin{vmatrix} 3a-b & a+5b \\ 3c-d & c+5d \end{vmatrix}$ 的值。

Ans : 80

【詳解】

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3a-b & a+5b \\ 3c-d & c+5d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a-b & 16a \\ 3c-d & 16c \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 3a-b & a \\ 3c-d & c \end{vmatrix} \\ &= 16 \begin{vmatrix} -b & a \\ -d & c \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= 16 \times 5 = 80。 \end{aligned}$$

5. 設 $ab \neq 0$, 且兩聯立方程式 $\begin{cases} ax+by=-4 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} 3ax-2by=3 \\ x-2y=3 \end{cases}$ 有相同的解, 求實數 a, b 的值。

Ans : $a=-1, b=3$

【詳解】

$$3x+2y=1 \dots (1), \quad x-2y=3 \dots (2),$$

$$(1)+(2) \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$$

$$\text{代入}(1) \Rightarrow 3+2y=1 \Rightarrow y=-1,$$

代入另兩式得

$$a - b = -4 \dots (3), \quad 3a + 2b = 3 \dots (4)$$

$$(3) \times 2 + (4) \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow a = -1$$

$$\text{代入}(3) \Rightarrow -1 - b = -4 \Rightarrow b = 3,$$

即 $a = -1, b = 3$ 。

6. 已知聯立方程式
$$\begin{cases} 6x + (k-2)y = 7k-17 \\ (k+5)x - 2y = -8k-24 \end{cases},$$

其中 k 為實數。

(1) 若此聯立方程式無解，則 k 的值為何？

(2) 若此聯立方程式有無限多組解，則 k 的值為何？

Ans : (1) -2 , (2) -1

【詳解】

(1) 若此聯立方程式無解，則

$$\frac{6}{k+5} = \frac{k-2}{-2} \neq \frac{7k-17}{-8k-24}$$

$$\Rightarrow (k-2)(k+5) = -12$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = -2 \text{ 或 } k = -1 \text{ (不合)}$$

(2) 由(1)知，若此聯立方程式有無限多組解，
則 k 的值為 -1 。

7. 已知 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (t, -4)$, 且 $(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel (2\vec{a} - \vec{b})$,

求實數 t 的值。

Ans : -2

【詳解】

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \parallel (2\vec{a} - \vec{b})$$

$$\Rightarrow (1 + 2t, 2 - 8) \parallel (2 - t, 4 + 4)$$

$$\Rightarrow \frac{1+2t}{2-t} = \frac{-6}{8}$$

$$\Rightarrow 4(1+2t) = -3(2-t) \Rightarrow t = -2.$$

8. 坐標平面上給定兩點 $A(1,0)$ 與 $B(0,1)$ ，又考慮另外三點

$P(\pi, 1)$ ， $Q(-\sqrt{3}, 6)$ 與 $R(2, \log_4 32)$ 。令 $\triangle PAB$ 的面積為 p 、

$\triangle QAB$ 的面積為 q 、 $\triangle RAB$ 的面積為 r 。 【99 學測】

請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $p < q < r$. (2) $p < r < q$. (3) $q < p < r$.

(4) $q < r < p$. (5) $r < q < p$.

Ans : (1)

【詳解】

$$\log_4 32 = \frac{\log 32}{\log 4} = \frac{5 \log 2}{2 \log 2} = \frac{5}{2}, \text{ 故 } R(2, \frac{5}{2}).$$

直線 $\overline{AB}$ 的斜率為 -1 ，故 $\overline{AB} : x + y - 1 = 0$ 。

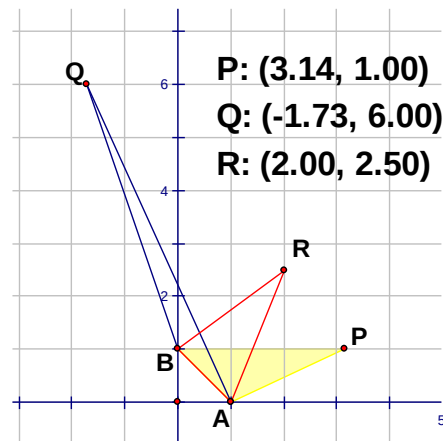
$$p = d(P, \overline{AB}) = \frac{\pi + 1 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

$$q = d(Q, \overline{AB}) = \frac{-\sqrt{3} + 6 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$$r = d(R, \overline{AB}) = \frac{2 + \frac{5}{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}},$$

$$\pi = 3.14, 5 - \sqrt{3} = 3.268,$$

得 $p < q < r$ 。



9. 坐標平面上三點 $A(-1,2)$ ， $B(4,3)$ ， $C(2k+1,k)$ 。

(1) 若 $\triangle ABC$ 的面積為 3，求實數 k 的值。

(2) 若 A ， B ， C 三點共線，求實數 k 的值。

Ans : (1) 6 或 2，(2) 4

【詳解】

$$\overrightarrow{AB} = (5, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (2k+2, k-2),$$

$$(1) \quad \Delta ABC \text{ 的面積為 } \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2k+2 & k-2 \end{vmatrix} \right| = 3$$

$$\Rightarrow |5(k-2) - (2k+2)| = 6$$

$$\Rightarrow |3k - 12| = 6$$

$$\Rightarrow |k - 4| = 2$$

$$\Rightarrow k = 6 \text{ 或 } k = 2.$$

(2) 若 A, B, C 三點共線

$$\Rightarrow |k - 4| = 0$$

$$\Rightarrow k = 4.$$

進階題

10. 已知聯立方程式 $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ 的解為 $x=1, y=-2$,

求聯立方程式 $\begin{cases} 3b_1x - 2a_1y = 6c_1 \\ 3b_2x - 2a_2y = 6c_2 \end{cases}$ 的解.

Ans: $x=-4, y=-3$

【詳解】

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = 1, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -2.$$

$\begin{cases} 3b_1x - 2a_1y = 6c_1 \\ 3b_2x - 2a_2y = 6c_2 \end{cases}$ 的解為

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6c_1 & -2a_1 \\ 6c_2 & -2a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3b_1 & -2a_1 \\ 3b_2 & -2a_2 \end{vmatrix}} = \frac{-12 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{-6 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = 2 \times (-2) = -4.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3b_1 & 6c_1 \\ 3b_2 & 6c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3b_1 & -2a_1 \\ 3b_2 & -2a_2 \end{vmatrix}} = \frac{18 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{-6 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}} = \frac{-3 \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -3 \times 1 = -3.$$

11. 設實數 $a > 0$. 若 x 、 y 的聯立方程式 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = a \\ x - ay = 122 \end{cases}$ 有解,

則 $a =$ _____ . 【99 學測】

Ans : 14

【詳解】

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \Rightarrow 3x = 2 - a,$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow 3y = 1 - 2a,$$

$$\text{代入} \textcircled{3} \quad 3x - 3ay = 366$$

$$\Rightarrow 2 - a - a(1 - 2a) = 366$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 182 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 14)(a + 13) = 0$$

$$\Rightarrow a = 14 \text{ 或 } a = -13(\text{不合}).$$

12. 坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$, 其中點 A 的坐標為 $(2,1)$, 點 B 的坐標為 $(8,2)$, 點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12 . 若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位, 則點 D 的坐標為 _____ . 【99 學測】

Ans : (6,8)

【詳解】

如下圖, 設 $C(12, y)$, 因 $ABCD$ 為平行四邊形,

故 $D(6, y-1)$.

直線 $\overline{AB}$: $x - 6y + 4 = 0$,

$$d(D, \overline{AB}) = \frac{|6 - 6(y-1) + 4|}{\sqrt{37}} = \frac{|16 - 6y|}{\sqrt{37}},$$

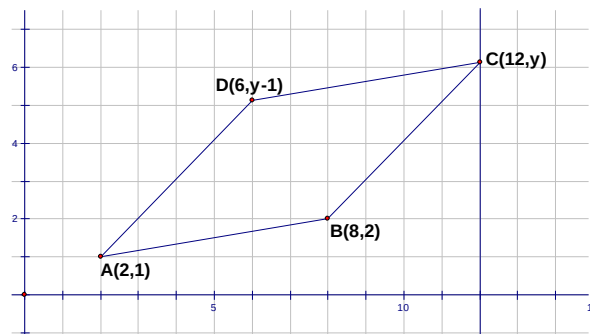
$$\overline{AB} = \sqrt{37}.$$

平行四邊形 $ABCD$ 的面積為

$$\frac{|16 - 6y|}{\sqrt{37}} \times \sqrt{37} = 38$$

$$\Rightarrow |16 - 6y| = 38$$

$$\Rightarrow 16 - 6y = 38 \text{ 或 } 16 - 6y = -38$$



$$\Rightarrow y=9 \text{ 或 } y=-\frac{11}{3}(\text{不合})$$

$$\Rightarrow D(6, 8)。$$

【另解】

$$\overrightarrow{AB}=(6, 1), \overrightarrow{AD}=(4, y-2), \text{ 則}$$

平行四邊形 ABCD 的面積

$$= \left| \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & y-2 \end{vmatrix} \right| = |6(y-2)-4| = |6y-16| = 38$$

$$\Rightarrow 3y-8=\pm 19 \Rightarrow y=9 \text{ 或 } y=-\frac{11}{3}(\text{不合}) \Rightarrow D(6, 8)。$$

13. 已知由向量 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為 4,

求由向量 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ 與 $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積。

Ans : 20

【詳解】

$$\text{設 } \overrightarrow{a}=(a_1, a_2), \overrightarrow{b}=(b_1, b_2), \text{ 則}$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right| = 4。$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

$$3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} = (3a_1 - 2b_1, 3a_2 - 2b_2),$$

由向量 $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ 與 $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$ 所張出的平行四邊形面積為

$$\begin{aligned} & \left| \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ 3a_1 - 2b_1 & 3a_2 - 2b_2 \end{vmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ 5a_1 & 5a_2 \end{vmatrix} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| 5 \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right| \\
&= 5 \left| \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \right| \\
&= 5 \times 4 = 20.
\end{aligned}$$

14. 工廠有甲與乙共二條生產線，現欲生產三百個產品。
 如果甲、乙二條線同時開動，則需 12 小時；如果先讓
 甲生產線開動 4 小時，而餘下的工作由乙生產線單獨完成，
 需再開動 24 小時才能完成所有產品。問如果只開動乙
 生產線，則需多少小時才能生產三百個產品。

Ans：30 小時

【詳解】

設甲生產線需 x 小時，乙生產線需 y 小時，則，

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \dots\dots(1),$$

$$\frac{4}{x} + \frac{24}{y} = 1 \dots\dots(2),$$

$$(2) - (1) \times 4$$

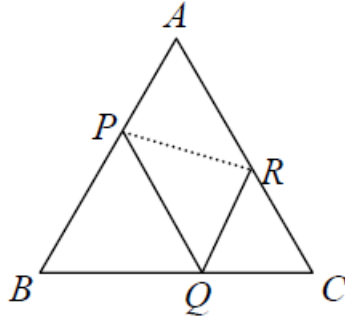
$$\Rightarrow \frac{20}{y} = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12}$$

$$\Rightarrow 8y = 20 \times 12$$

$$\Rightarrow y = 5 \times 6 = 30.$$

只開動乙生產線，則需 30 小時才能生產三百個產品。

15. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P ， Q ， R ，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示。若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$ ，則線段 PR 的長度為 27。[學測 101]



Ans : (27) 7

【詳解】

$\because APQR$ 為平行四邊形，

$\therefore \angle PAR = \angle BPQ = \angle QRC = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle PBQ$ 、 $\triangle RQC$ 為正三角形

令 $\overline{AP} = x$ ， $\overline{BP} = \overline{AR} = 13 - x$

$\Delta APR = \frac{1}{2}$ 平行四邊形 $APQR$ 面積

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x)(13-x) \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}(20\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ 或 } 5$$

$$\therefore \overline{PR} = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ} = \sqrt{49} = 7$$