

選修數學

進階
講義

上

期望值

成功高中·陳冠宏老師



信望愛文教基金會

15-1-2 期望值

定理敘述

若一隨機變數 X 的機率分布表如下：

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

則定義其期望值 $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$

性質： $E(ax + b) = aE(X) + b$

定理證明或說明

性質：

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b)p_i = a \sum_{i=1}^n x_i p_i + b \sum_{i=1}^n p_i = aE(X) + b$$

關鍵字

期望值

例題 1

設袋中有 1 元硬幣 5 枚，5 元硬幣 3 枚，10 硬幣 1 枚，

(1)任取一枚，得款之期望值

(2)任取二枚，得款之期望值

Ans：(1) $\frac{10}{3}$ ；(2) $\frac{20}{3}$

解：

$$(1) 1 \times \frac{5}{9} + 5 \times \frac{3}{9} + 10 \times \frac{1}{9} = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$$

$$(2) 2 \times \frac{C_2^5}{C_2^9} + 6 \times \frac{C_1^5 C_1^3}{C_2^9} + 10 \times \frac{C_2^3}{C_2^9} + 11 \times \frac{C_1^5 C_1^1}{C_2^9} + 15 \times \frac{C_1^3 C_1^1}{C_2^9} = \frac{20}{3}$$

例題 2

設袋中有 k 號球 k 個, $k=1,2,\dots,5$, 今從袋中任取一球

(1) 若取中 k 號球, 則獲得 k 元, 若以隨機變數 X 表獲得的金額, 試求 X 之期望值

(2) 若取中 k 號球, 則獲得 $3k+2$ 元, 若以隨機變數 Y 表獲得的金額, 試求 Y 之期望值

Ans : (1) $\frac{11}{3}$; (2) 13

解 :

袋中共有 $1+2+3+4+5=15$ 個球

$$(1) E(X) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15} = \frac{11}{3}$$

$$(2) E(Y) = E(3X + 2) = 3E(X) + 2 = 13$$

例題 3

擲 3 個硬幣, 出現三正面可得 40 元, 二正面可得 20 元, 一正面可得 10 元, 為了公平起見 (即獲利的期望值為 0), 求出現三反面時, 應該賠多少元?

Ans : 130 元

解 :

設出現三反面時, 應該賠 x 元

$$E = 40 \times \frac{1}{8} + 20 \times \frac{3}{8} + 10 \times \frac{3}{8} + (-x) \times \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow x = 130$$

例題 4

保險公司欲推出一種火險方案, 保費 1000 元, 保險期間, 若住戶失火, 可獲得 10 萬的賠償。根據統計, 失火的機率約為 0.004, 則保險公司獲利的期望值為_____

Ans : 600 元

解 :

保險公司獲利的期望值 :

$$(解一) 1000 \times 0.996 + (1000 - 100000) \times 0.004 = 600$$

$$(解二) 1000 \times 1 + (-100000) \times 0.004 = 600$$

例題 5

設袋中有 k 號球 k 個, $k=1,2,\dots,20$, 今從袋中任取一球, 若取得 k 號球可得 k 元, 試求獲得金額的期望值_____

Ans : $\frac{41}{3}$

解 :

袋中共有 $1+2+\dots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$ 個球

則期望值 $= 1 \times \frac{1}{210} + 2 \times \frac{2}{210} + \dots + 20 \times \frac{20}{210} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k^2}{210} = \frac{1}{210} \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = \frac{41}{3}$



溫故知新

習題 1

設袋中 3 個球, 2 個球上標 1 元, 1 個球上標 5 元。從袋中任取 2 個球, 即可得到兩個球所標錢數的總和, 則此玩法所得錢數的期望值為_____

習題 2

某次數學測驗共有 25 題單一選擇題, 每題都有五個選項, 每答對一題可得 4 分, 答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對; 有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確, 因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個; 另外 3 題只好亂猜, 則他這次測驗得分之期望值為_____

習題 3

給定一公正骰子

- (1) 若擲出 k 點, 則獲得 k 元, 若以隨機變數 X 表獲得的金額, 試求 X 之期望值
- (2) 若擲出 k 點, 則獲得 $2k+3$ 元, 若以隨機變數 Y 表獲得的金額, 試求 Y 之期望值

習題 4

擲兩個骰子, 若兩個骰子點數相同, 則可得該點數 10 倍的金額, 為了公平起見(即獲利的期望值為 0), 求點數不同時, 應該賠多少元?

習題 5

保險公司欲針對 65 歲的長青族推出一年期的壽險方案, 保費 2000 元, 保額 100 萬元。根據統計, 65 歲的長青族一年內死亡的機率約為 0.0015, 則保險公司獲利的期望值為_____

習題 6

投擲一公正硬幣 20 次，試求出現正面次數的期望值_____

習題 7

【數乙 102】

袋中有 3 顆白球與 1 顆黑球，每次隨機從袋中抽出 1 球，袋中每一球被抽到的機率皆相同，抽出後不放回，直到抽中黑球時遊戲結束。若在第 k 次抽到黑球，則得到 k 元獎金。此遊戲可獲得獎金的數學期望值為_____元（化為最簡分數）。

習題 8

【學測 96】

摸彩箱裝有若干編號為 $1, 2, \dots, 10$ 的彩球，其中各種編號的彩球數目可能不同。今從中隨機摸取一球，依據所取球的號數給予若干報酬。現有甲、乙兩案：甲案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬同為 k ；乙案為當摸得彩球的號數為 k 時，其所獲報酬為 $11-k$ ($k=1, 2, \dots, 10$)。已知依甲案每摸取一球的期望值為 $\frac{67}{14}$ ，則依乙案每摸取一球的期望值為_____

 解答與解析

習題 1 : $\frac{14}{3}$

習題 2 : 68

習題 3 : (1) $\frac{7}{2}$; (2) 10

習題 4 : 7 元

習題 5 : 500 元

習題 6 : 10

習題 7 : $\frac{5}{2}$; 解：期望值 $= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$

習題 8 : $\frac{87}{14}$

解：設 p_k 表抽中 k 號球之機率，且 $p_1 + p_2 + \dots + p_{10} = 1$

$$\text{則甲的期望值 } E_1 = 1p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + 10p_{10} = \frac{67}{14}$$

$$\text{乙的期望值 } E_2 = 10p_1 + 9p_2 + 8p_3 + \dots + 1p_{10}$$

$$E_1 + E_2 = 11p_1 + 11p_2 + 11p_3 + \dots + 11p_{10} = 11(p_1 + \dots + p_{10}) = 11$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{87}{14}$$